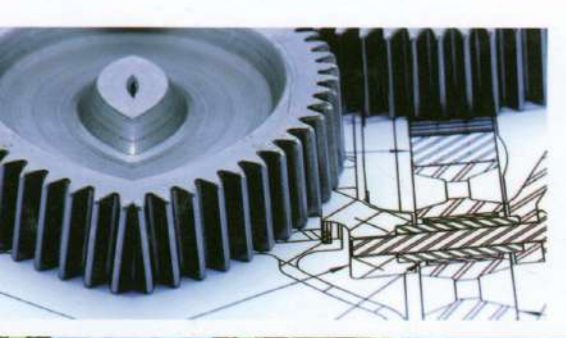
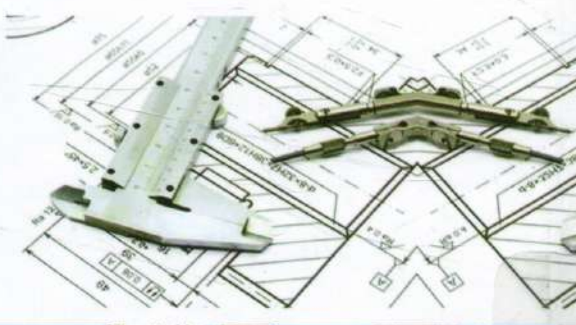
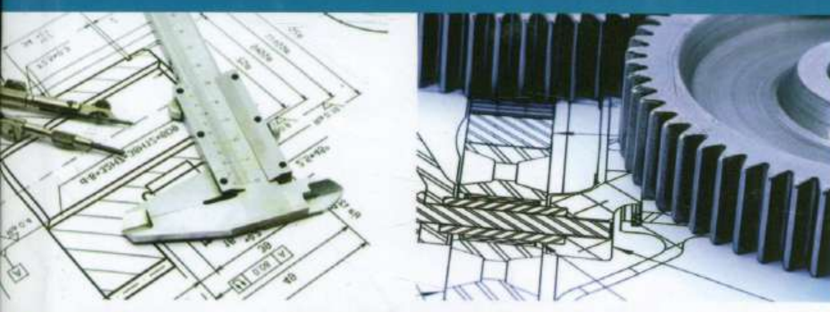
مفاهيم أساسية في
الهندسة
واستراتيجيات تدريسها

الدكتور
محمد عبد الوهاب حمزة


كنوز المعرفة
www.darkonoz.com





مفاهيم أساسية في الهندسة واستراتيجيات تدريسها

9 789957 742966

الأردن - الأردن
وسط البلد - مجمع الفحيص
هاتف : 877 4655 6 962+
فاكس : 875 4655 6 962+
خلوي : 494 795525 962+
ص . ب : 712577
dar_konoz@yahoo.cpm
info@darkonoz.com



دار كنوز المعرفة العلمية
للنشر والتوزيع


مكتبة .. هنا سور الأزبكية على التليجرام
mohamed khatab





بسم الله الرحمن الرحيم

مفاهيم أساسية في

الهندسة

واستراتيجيات تدريسها

مفاهيم أساسية في

الهندسة

وإستراتيجيات تدريسها

الدكتور

محمد عبد الوهاب حمزة



الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٣م

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : (٢٠١٣/٦/١٩٢٤)

٥١٦

حمزة محمد عبد الوهاب

مفاهيم أساسية في الهندسة / محمد عبدالوهاب حمزة .- عمان: دار كنوز المعرفة للنشر والتوزيع، ٢٠١٣

(   ) ص.

ر.أ: (٢٠١٣/٦/١٩٢٤)

الواصفات: / الهندسة (رياضيات)// المنحنيات/

أعدت دائرة المكتبة الوطنية بيانات الفهرس والتصنيف الأولية
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

ردمك ISBN: ٩٧٨ - ٩٩٥٧ - ٧٤ - ٢٩٦ - ٦



دار كنوز المعرفة العلمية للنشر والتوزيع

الأردن - عمان - وسط البلد - مجمع الفحيص التجاري
تلفون: ٤٦٥٥٨٧٧ ٦ ٩٦٢+ - فاكس: ٤٦٥٥٨٧٥ ٦ ٩٦٢+
موبايل: ٩٦٢٧٩٥٥٢٥٤٩٤+ - ص.ب ٧١٢٥٧٧ عمان
الموقع الإلكتروني: www.darkonoz.com
إيميل: dar_konoz@yahoo.com , info@darkonoz.com

تنسيق وإخراج: صفاء نور الأبصار
٠٠٩٦٢ ٧٨ ٥٢٨٨٥٠٤
safanimer@yahoo.com

الإهداء

إلى من علمني أن الحياة كفاح وصبر واجتهاد

إلى روح أبي الغالي رحمه الله

إلى منبع الطيبة والحنان أطال الله عمرها

إلى أمي الغالية

إلى من منحتني حبها ورفيقة دربي

إلى زوجتي الحبيبة

إلى أبنائي حفظهم الله: ميس، حمزة وأحمد

إلى اخواني وأخواتي

وإلى كل محب وطالب للعلم

أهدي هذا الجهد

د. محمد عبد الوهاب حمزة

فهرس المحتويات

المقدمة

الهندسة هي ليست فقط أحد فروع الرياضيات، ولكنها تعتبر أساسها وجذورها، ويجب عند تدريس الرياضيات بصورة عامة والهندسة بصفة خاصة أن نهتم بالأهداف المرتبطة بالعمليات العقلية العليا و أهمها المهارات المرتبطة بالتفكير و التي ترقى بالتلميذ إلى التفكير الإبداعي.

وتعد المفاهيم الهندسية (Geometrical Concepts) اللبنات الأساسية في البناء الهندسي، وذلك لأن المهارات الهندسية ما هي إلا تطبيق للمفاهيم ووضعها في صورة قواعد وخوارزميات تستخدم في حل المسائل الهندسية المدرسية، كما أن المبادئ والتعميمات هي عبارات رياضية تضع قواعد وقوانين للعلاقة بين مفهومين رياضيين أو أكثر وهي تمثل الهيكل الرئيسي للبناء الهندسي.

ويؤكد كثير من المربين في مجال تعليم الرياضيات، على أن نظرة الخوف والكره للهندسة من جانب الطلبة، ترجع إلى طريقة عرض الهندسة في حجرات الدراسة، التي ينبغي تغييرها، بحيث يساعد تدريس الهندسة على تدريب التلاميذ على استخدام أساليب التفكير مثل التفكير التأملي والتفكير الناقد .

من هنا يأتي هذا الكتاب ليقدّم مفاهيم أساسية في الهندسة بطريقة مشوقة وسهلة وواضحة، ليكون مرجعاً للطلبة والمعلمين على حد سواء، كما يحتوي الكتاب أشكالاً توضيحية وتمارين ومسائل عديدة ومتنوعة في المستوى، مع إجابات مفصلة لها، بما يسهّل على الدارس فهم الموضوع والتدرّب عليه.

وقد جاء هذا الكتاب في عشرة وحدات، تناولت الوحدة الأولى مفهوم الهندسة وأهدافها، والبناء الهندسي، ومبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية.

أما الوحدة الثاني فيتناول مفاهيم هندسية أساسية، كالمستقيمات والمستوى، والزوايا وأنواعها والعلاقات بينها، والمضلعات وأنواعها.

تهتم الوحدة الثالثة بالدائرة والتطابق والتشابه، أما الوحدة الرابعة فتتناول الهندسة التحليلية ومعادلة الخط المستقيم والميل، أما الوحدة الخامسة فتتناول التحويلات الهندسية، مثل الانعكاس والانسحاب والتماثل والدوران.

وفي الوحدة السادسة نركز على المحيط والمساحات والحجوم وتطبيقاتها، وتتناول الوحدة السابعة الإنشاءات الهندسية، أما الوحدة الثامنة فتهتم بالقطوع المخروطية، وتتناول الوحدة التاسعة الهندسة الفضائية والمسلمات والنظريات المرتبطة بها.

وأخيراً الوحدة العاشرة التي تتضمن بعض الاستراتيجيات العامة في تدريس الهندسة، واستراتيجية بوليا العامة.

وينتهي الكتاب إلى المراجع العربية والأجنبية ومواقع الانترنت التي تم الرجوع إليها في هذا الكتاب.

وأخيراً أرجو أن يجد الطلبة والمعلمون الفائدة والمتعة المرجوة من هذا الجهد المتواضع، وأن يساهم هذا الكتاب في تبسيط المفاهيم الهندسية ويزيد فهم الطلبة لها.

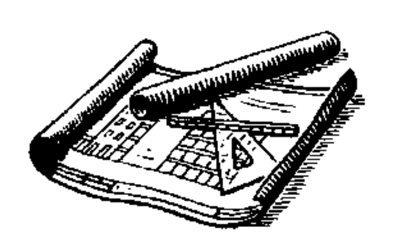
والله ولي التوفيق

د. محمد عبد الوهاب حمزة

عمّان في ٢٠/ ٥/ ٢٠١٣

الوحدة الأولى

مفهوم الهندسة وأهدافها



الوحدة الأولى
مفهوم الهندسة وأهدافها

(١-١) مقدمة:

الرياضيات لغة عالمية يدخل استخدامها كل مجالات الحياة البشرية، والحاجة إليها بدأت منذ وجود الإنسان على هذه الأرض، حيث استخدمها الإنسان في البيع والشراء والحساب والهندسة والعمران وغير ذلك، وهي ستبقى باستمرار تلعب دورًا أساسيًا في تطور الحضارة الإنسانية من خلال إجراء الحسابات ومعالجة البيانات والتواصل مع الآخرين وحل المشكلات واتخاذ القرارات والتعامل مع العلوم الأخرى.

يمكن اعتبار أن علم الهندسة هو أكبر فروع الرياضيات وأكثرها تشعباً واتساعاً، وهو من العلوم المهمة في حياتنا اليومية، فللهندسة تطبيقات عملية في مجالات عدة، فالمعماريون والنجّارون يحتاجون لفهم خواص الأشكال الهندسية لتشييد مبانٍ آمنة وجذابة. كما يستخدم المصمِّمون والمهندسون المشتغلون بالمعادن والمصوِّرون مبادىء الهندسة في أداء أعمالهم.

ونرى الأشكال الهندسية والمجسمات في كل مكان حولنا، مثل اشارات المرور والمباني والنوافذ والآثار والسبورة.

وتمثل الهندسة أحد الفروع المهمة في علم الرياضيات وأحد مكوناتها الأساسية لأنها تزود المتعلمين بالمهارات الأساسية الضرورية للحياة العملية مثل مهارات الحس المكاني والاستكشاف والقدرة على حل المشكلات والتعليل الاستنتاجي والقدرة على التخمين، كما أنها تتضمن جوانب تعلم معرفية لازمة لفهم وتفسير جوانب التعلم المعرفية الأخرى المتضمنة لفروع الرياضيات المختلفة (الحربي، ٢٠٠٣)، وتعتبر الهندسة وسيلة بالغة الفعالية لتنمية التفكير الإبداعي لدى الطلبة بما يُلبي متطلبات التعليم في المستقبل.

كما تعتبر من أبرز وجوه الحضارة الإنسانية؛ فمنذ بدأ الإنسان يبني البيوت ويعد الأراضي للزراعة كان محتاجًا للهندسة والقياس، كما لا يخفى إسهامها

الكبير في القدرة على التفكير المنطقي لدى دارسيها، ولعل هذا ما جعلها تلعب دورًا كبيرًا في منهاج الرياضيات.

(١-أ) مفهوم علم الهندسة:

علم الهندسة (Geometry): فرع من فروع الرياضيات يُعنى بدراسة هيئات ومواضع وأحجام الأشكال الهندسية، ويشمل الأشكال المستوية كالمثلثات والمستطيلات، والأشكال الجسَّمة (ثلاثية الأبعاد) كالمكعبات والكرات، كما يتناول التطابق والتشابه، والهندسة التحويلية (الانعكاس، والتماثل، والدوران....)، بالإضافة إلى النقطة والمستقيم والمستوى والعلاقات بينها، والزوايا، والهندسة التحليلية (معادلة الخط المستقيم، الميل،...)، كما يهتم بالهندسة الفضائية، والنسب المثلثية، وغيرها.

يبدو واضحاً من التعريف السابق أن علم الهندسة هو علم ضخم وله العديد من المجالات والفروع، نذكر منها:

- الهندسة التحليلية: تهتم الهندسة التحليلية بدراسة الخواص الهندسية للأشكال باستخدام الوسائل الجبرية. عادة تستخدم إحداثيات ديكارتية لوصف نقاط الفراغ بدلالة أعداد هي الإحداثيات ثم يتم إيجاد المعادلة الجبرية التي تصف الدائرة أو القطع الناقص أو القطع المكافيء أو غيرها. وتلعب دورا مهما في حساب المثلثات وحساب التفاضل والتكامل، ومن أبرز موضوعاتها حساب المسافة بين نقطتين ومعادلة الخط المستقيم وميله.
- الهندسة الإقليدية: تخضع لمجموعة من المسلمات وضعها إقليدس في كتابه (العناصر)، وهي تقوم على مفاهيم غير معرفة مثل النقطة والمستقيم والمستوى.
- الهندسة الفضائية أو الهندسة الفراغية: هي الهندسة الإقليدية مطبقة في فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد مشابه للفضاء الذي نعيش فيه. تهتم الهندسة الفراغية بدراسة الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد مثل المكعب، المنشور، المخروط، الهرم، الاسطوانة الكرة،تقاطع المستويات والمستقيمات، وعلاقتها بعضها ببعض وفق قوانين ونظريات مبرهنة ثابتة.

- علـم المثلثـات (Trigonometry) هـو فـرع مـن الهندسـة يـدرس الزوايـا والمثلثات والنسب المثلثية كالجيب والجيب التمام.
- الهندسة التحويلية: هي أحد فروع الهندسة التي تـدرس الـتغير في موضـع شكل أو نقطة عند تأثرها بالانسحاب أو الانعكاس أو الدوران وغيرها.

(١-٣) أهـمية علم الهندسة:

تبرز أهمية دراسة علم الهندسة في فهم مفاهيم ليست بالـضرورة هندسـية فقط، بل رياضية وعلمية كذلك، وتلعـب بالإضـافة إلى ذلـك دورا أساسيا في العلوم التطبيقية والتكنولوجية. كما أن الهندسـة أداة لتطـوير قـدرة الفـرد علـى التفكير المنطقي.

إن تدريس الهندسة يساعد على اكساب الطلبة عدد من المهارات منها:

- مهارات تطبيقية: القدرة على استخدام النماذج الهندسية في حل المشاكل.
- مهارات بصرية: القـدرة علـى التعـرف علـى مختلـف الأشـكال المـستوية والفضائية وتحديد العلاقات بينها.
- مهارات لفظية: القدرة على وصف الأشكال وصياغة التعاريف والتعرف على البنى المنطقية شفهيا.
- مهـارات الرسـم: القـدرة علـى رسـم الأشـكال والتعـرف علـى دورهـا ومميزاتها.
- مهارات منطقيـة: القـدرة علـى البرهـان بمختلـف أنماطـه والقـدرة علـى الاستنتاج والتفكير العلمي.

ولكـن أهميـة الرياضـيات والهندسـة كأحـد فروعهـا لا تنحـصر في استخداماتها في أنـشطة الحيـاة اليوميـة فحـسب، بـل تتعـداها إلى مـا يـأتي (النعواشي،٢٠٠٧):

١) الهندسة مهمـة في الكـثير مـن العلـوم، فمعظـم العلـوم كالفيزيـاء الفلـك

تستخدم علم الهندسة في موضوعاتها، بالإضافة إلى دورها في علم الهندسة وتصميم الجسور والمباني والسدود والطرق السريعة والأنفاق والعديد من المشاريع الهندسية. فهي أساس التقنية والتقدم العلمي المذهل في العديد من العلوم الأخرى.

مما يستلزم امتلاك الطلبة لبعض الأساسيات في الهندسة ليتمكنوا من استيعاب موضوعات العلوم الأخرى.

٢) الهندسة تُعلّم الطلبة المنطق والتفكير العلمي المتسلسل، مما يضفي على شخصية الطلبة الاتزان في طرح الموضوعات، والموضوعية في التفكير، والدقة في استخلاص النتائج والنقد البناء، وما أحوجنا في هذا العصر لتلك الصفات الحضارية التي يكتسبها الطلبة بفضل دراسة الرياضيات.

٣) الهندسة تعلم الطلبة طرق حل المشكلات بأسلوب علمي دقيق، وذلك عن طريق حل المسائل والتمارين الرياضية، مما يساعدهم على حل مشكلات حياتية أخرى قد تواجههم.

٤) التجريد في الهندسة والرياضيات مؤشر لرقي العقل البشري، فالتجريد الذي نلاحظه في العديد من ميادين الرياضيات ليس عيباً فيها، بل هو مؤشر على تطور العقل البشري والفكر الإنساني، بحيث يمكن التعامل مع مفاهيم مجردة غير محسوسة يحتاجها الفرد في علوم أخرى أو مراحل قادمة من حياته، ومن الضروري أن يتناسب مستوى التجريد مع المستوى المعرفي للفرد المتلقي للمعرفة الرياضية، فالمسائل التجريدية في الرياضيات الآن قد تكون واقعاً محسوساً في وقت لاحق.

(١-٤) البنية الرياضية الحديثة للهندسة:

تعتمد الهندسة الحديثة على دراسة البنية (الأنظمة) الرياضية (mathematical structure) والتي تُعرّف على أنها نظام رياضي يتكون من مجموعة من العناصر تربط بينها عمليات أو علاقات.

وعند النظر إلى الهندسة الأقليدية مثلاً فإن بناءها يتكون من العناصر الآتية:

١) مفاهيم أولية (غير معرفة) (Undefined Concepts)؛ وهي مفاهيم بديهية مألوفة لا تحتاج إلى تعريف مثل النقطة والمستقيم والمستوى.

٢) مفاهيم معرفة (Defined Concepts)؛ وهي مفاهيم تحتاج إلى تعريف حتى تكون واضحة كمفهوم الدائرة والمربع و مفهوم التعامد والتوازي.

وعادة فإننا نستخدم المفاهيم غير المعرفة في توضيح المفاهيم التي تحتاج إلى تعريف، فمثلاً عند تعريف الدائرة نقول إنها مجموعة من النقاط التي تبعد بعداً متساويا عن نقطة ثابتة، لاحظ أننا استخدمنا المفهوم غير المعروف وهو النقطة في تقديم تعريف الدائرة.

٣) المسلمات (postulates)؛ وهي عبارات (تعميمات) يقبل بصحتها دون برهان.

□ مثال: يمر مستقيم واحد بأي نقطتين مختلفتين أو إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة لاحظ أن هذه الجمل بديهة ولا تحتاج لبرهان، كما أننا نستخدم في صياغتها المفاهيم غير المعرفة والمفاهيم المعرفة.

٤) النظريات (theorems)؛ وهي عبارات (تعميمات) يجب برهان صحتها وذلك عن طريق استخدام المسلمات أو النظريات المبرهنة.

□ مثال: مجموع زوايا المثلث ١٨٠°.

في المثلث القائم الزاوية يكون مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

٥) التطبيقات (Applications): وتكون هذه التطبيقات على شكل تمارين ومسائل يكون حلها بالمسلمات والنظريات والمفاهيم المعرفة وغير المعرفة

مثال: يمكن تمثيل بناء الهندسة الإقليدية بالشكل التالي:

تطبيقات (تمارين ومسائل)
نظريات
مسلمات
مصطلحات معرفة (مفاهيم)
مصطلحات غير معرفة (مفاهيم)

بناء الهندسة الاقليدية

(١-٥) بناء الهندسة الأقليدية

وتتسم البنية الهندسية بخصائص منها (حمدان، ٢٠٠١):

١) الاكتمال (completeness): أي أن مجموعة المسلمات ضمن نفس النظام كافية لبرهان أي نظرية تربط بين المفاهيم المعرفة وغير المعرفة

٢) الاستقلال (Independence) أي أن مسلمات النظام ليست نتائج من بعضها ولايمكن التوصل لها أو برهنتها من مسلمات أخرى.

فمثلاً: إذا نظرنا إلى العبارة الآتية: يمكن رسم ثلاث مستقيمات مختلفة بحيث تمر بنقطتين فقط بين ثلاث نقاط مستقيمة، فإن هذه العبارة ليست مسلمة لأنه يمكن استنتاجها وبرهنتها بالاعتماد على المسلمة الآتية:

يمر مستقيم واحد فقط بين أي نقطتين مختلفتين

٣) التصنيف (catagoriness) ويعني أن النماذج المختلفة في البنية الرياضية تكون متماثلة وذلك من خلال وجود اقتران تناظريين هذه النماذج.

٤) التوافق وعدم التناقض (consistency) أي أن النظام الواحد لا يؤدي إلى نتيجتين متناقضتين، كما لا تتناقض المسلمات مع بعضها ولا توجد قضيه ونفيها صائبتين معاً أو خاطئتين معاً.

فمثلاً إذا قلنا إن مجموع أي عددين زوجين هو عدد زوجي فإن هذه العبارة صحيحة دائماً ولا يمكن التوصل إلى مثال يناقضها.

(١-٦) مصفوفة منهاج الرياضيات الأردني للصفوف من الأول إلى الثالث:

سيعرض الجدول الآتي مصفوفة منهاج الرياضيات الأردني للمراحل الأساسية من الصف الأول حتى الصف الثالث.

النتاجات التعلمية المحورية (البلاونة وأبو موسى، ٢٠١٠):

يتوقع من الطالب بعد دراسته لمبحث الرياضيات أن يكون قادراً على:

الرقم	النتاج التعلمي
١	تقدير الدور الذي تلعبه الرياضيات في تحسين نوعية حياة الأفراد والمجتمع
٢	ربط الأفكار الرياضية وتطبيقاتها بالثقافة العربية الإسلامية
٣	تقبل أفكار الآخرين وحلولهم الرياضية في أثناء العمل معهم وتقديم تغذية راجعة
٤	إظهار الثقة والمثابرة والأمانة والتعاون عندما يتعلم الرياضيات ويطبقها
٥	وعي دور الرياضيات باعتبارها لغة عالمية تطورت من حضارات متنوعة، وتقدير دورها في بناء علاقات إنسانية إيجابية بين الثقافات العالمية
٦	توظيف مهارات التبرير والاستدلال الرياضي للتعلم مدى الحياة وتطويرها
٧	معالجة البيانات (تجميع، تحليل، تفسير) للوصول إلى استدلالات وتنبؤات
٨	التواصل بفعالية مستخدماً لغة الرياضيات ورموزها
٩	تعلم الرياضيات بشكل مستقل، ومن خلال العمل مع الآخرين والاسهام إيجابياً كقائد أو عضو في فريق
١٠	استخدام أدوات التكنولوجيا مثل (البرمجيات، الآلات الحاسبة، الحاسب) بفاعلية ليطور فهماً معمقاً للرياضيات
١١	استخدام الطرق والأدوات الأنسب (الحساب الذهني، التقدير، القلم والورقة، الحاسبات) عند إجراء الحسابات
١٢	استخدام الرياضيات لتطوير مهارات التفكير الناقد ومهارات صنع القرار في المواقف الحياتية
١٣	تطبيق المهارات والعمليات الرياضية بفاعلية ودقة في الحياة اليومية
١٤	توظيف حل المشكلات لتوليد المعرفة
١٥	ربط خبراته في الرياضيات معاً، وربط خبراته في الرياضيات مع خبراته في المجالات المعرفية الأخرى ومع العالم الواقعي

الرقم	الناتج التعلمي
١٦	استخدام عمليات الاستقصاء والنمذجة في الحياة العملية
١٧	وعي لماذا، وكيف، ومتى، تستخدم الرياضيات ودورها الذي تلعبه في مختلف المهن
١٨	تقدير دور العلماء والعرب والمسلمين خاصة ممن أسهموا في تطوير الرياضيات

محاور منهاج الرياضيات للصفوف الأساسية الأولى المرتبطة بالهندسة (حمزة والبلاونة ٢٠١١)

الصف:الأول الأساسي　　　　المحور الرئيس: الجبر (الأنماط)

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ١. يبدي فهماً للأنماط والعلاقات والاقترانات ويستخدمها في وصف البيئة المحيطة به، ويوظفها في حل المشكلات. ٢. يمثل مواقف رياضية مستخدماً الرموز والتعابير الجبرية والمعادلات والمتباينات ويحللها. ٣. يستخدم النماذج الرياضية لتمثيل العلاقات الكمية وفهمها. ٤. يحلل التغير في مواقف متعددة.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يستقصي قواعد أنماط عددية وغير عددية نابعة من مواقف حياتية ويستخدمها في التنبؤ ويوضحها.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ١-١٩ يصنف الأشياء وفق خاصية واحدة مثل، (اللون، الحجم، الشكل) ويرتبها. ١-٢٠ يصف أنماطاً عددية وغير عددية بسيطة ويحددها. ١-٢١ يستكشف أنماط عددية ويكملها وينشئها. ١-٢٢ يصف نماذج الأنماط في سياقات مستخدماً ومعالجات لفظية وحركية وينشئها.

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ١. يفهم سمات الأشكال القابلة للقياس وأنظمة القياس وعملياتها. ٢. يطبق التقنيات والأدوات والصيغ المناسبة لتحديد القياس.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يقدر السمات القابلة للقياس باستخدام وحدات قياس غير معيارية ولغة قياس مناسبة ويقارن بينها.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ١-٢٣ يحدد ويستخدم عبارات القياس المتعلقة بالأطوال والمتضمنة (الطول والعرض)، الوقت (ساعة، نصف ساعة، قبل، بعد، إلامس، الغد، اليوم، الليل، النهار، الصباح، بعد الظهر، المساء)، النقود (قرش، خمسة قروش، عشرة قروش)، لوحة التقويم (الرزنامة) الفصول الأربعة. ١-٢٤ يقدر الأطوال، إلاحجام، وأوزان الأشياء الموجودة في بيئته المحيطة به ويقارنها باستخدام وحدات غير معيارية. ١-٢٥ يستخدم المعالجات لحل مسائل تتعلق بقياس الطول أو الوقت أو النقود.

الصف: الأول الأساسي — المحور الرئيس: الهندسة

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يحلل خصائص الأشكال الهندسية ذات البعدين وذات الأبعاد الثلاثة ويطور حججاً رياضية حول العلاقات الهندسية.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يحدد الأشكال ذات البعدين وذات الأبعاد الثلاثة ويصفها. - يحدد خصائص الأشكال ذات البعدين وذات الثلاثة أبعاد.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ١-٢٧ يصف الأشكال ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد ويصنفها مستخدماً الأدوات الملموسة والرسم، وفقاً لخصائصها من حيث: - الرؤوس. - الوجوه. - الحواف. ١-٢٨ يبني أشكالا ونماذج ثلاثية الأبعاد. ١-٢٩ يصف علاقة موقع مجسم مع آخر باستخدام تعبيرات مثل (بالقرب، بجانب، داخل، خارج، يسار).

الصف: الثاني الأساسي — المحور الرئيس: الجبر (الأنماط)

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يبدي فهماً للأنماط والعلاقات والاقترانات ويستخدمها في وصف البيئة المحيطة به ويوظفها في حل المشكلات.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يستقصي وينشئ ويعبر عن قواعد أنماط عددية وغير عددية نابعة من مواقف حياتية وخبرات رياضية ويستخدمها للتنبؤ	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ٢-١٨ يستنتج أن النمط ينتج من تكرار عملية (مثال: الجمع) ومن تحويلات مثل (الانعكاس، الدوران، الانسحاب) أو من إحداث تغيير في الخصائص (مثال: الموضع، اللون). ٢-١٩ يبتكر أنماطاً غير عددية ضمن أي سياق (ورق جدران، رزنامه) ويصفها. ٢-٢٠ ينشئ نمطاً باستخدام خاصيتين مثل: (الحجم والموقع).

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
		٢-٢١ يربط الأنماط المتزايدة والمتناقصة بعمليتي الجمع والطرح. ٢-٢٢ يحول من نمط إلى آخر باستخدام المحسوسات، الرسومات، الاعمدة، الرموز. ٢-٢٣ يوضح قاعدة النمط ويقدم تنبؤات مبنية على أنماط مستخدماً نماذج ومجسمات.

الصف: الثاني الأساسي — المحور الرئيس: القياس

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يفهم سمات الأشكال القابلة للقياس وأنظمة القياس وعملياتها. - يطبق التقنيات والأدوات والصيغ المناسبة لتحديد القياس.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يقدر السمات القابلة للقياس باستخدام وحدات قياس غير معيارية ولغة قياس مناسبة ويقيسها ويقارن بينها. - يحل مسائل تتعلق بالمقاييس المعيارية وغير المعيارية للأشكال ثنائية الأبعاد أو ثلاثية الأبعاد الموجودة في بيئته المحيطة به.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ٢-٢٤ يحدد عبارات القياس المتعلقة بالطول(مثل السنتمتر، المتر)، الوقت (الثانية، الدقيقة، يوم) النقود(دينار) ويستخدمها. ٢-٢٥ يحدد العلاقة (العلاقات) بين مفاهيم القياس (أقصر وقت، أطول طول) ٢-٢٦ يختار الوحدة غير المعيارية المناسبة لقياس الوزن، الحجم، المساحة. ٢-٢٧ يقدر الأطوال والحجوم باستخدام وحدات معيارية وغير معيارية ويقيسها ويقارن بينها. ٢-٢٨ يستخدم المعالجات لحل المسائل على القياس تتضمن الطول، الوقت، النقود.

الصف: الثالث الأساسي **المحور الرئيس: القياس**

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يفهم سمات الأشكال القابلة للقياس وأنظمة القياس وعملياتها. - يطبق التقنيات والأدوات والصيغ المناسبة لتحديد القياس.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يقدر السمات القابلة للقياس باستخدام وحدات قياس غير معيارية ولغة قياس مناسبة ويقارن بينها. - يحل مسائل تتعلق بالقياسات المعيارية للأشكال ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد الموجودة في بيئته المحيطة به.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ٣-٢٥ يحدد وحدات القياس المتعلقة بالطول ويستخدمها (مثل: مليمتر، كيلو متر)، الوقت (يوم، أسبوع، شهر، سنة) الحجم والسعة (ليتر)، الحرارة (درجة مئوية)، الكتلة (غرام، كيلو غرام). ٣-٢٦ يحدد العلاقة (العلاقات) بين وحدات القياس (مثل: الأيام، الأسابيع، الأشهر، والسنوات). ٣-٢٧ يقدر، (باستخدام الوحدات المعيارية) المحيطات والمساحات للأشكال ثنائية الأبعاد ويقيسها ويقارن بينها. ٣-٢٨ يقدر، (باستخدام الوحدات المعيارية) سعة الأوعية وكتلة الأشياء المتشابهة ويقيسها ويقارن بينها. ٣-٢٩ يحل مسائل تتعلق بالقياس مرتبطة بحياته اليومية.

الصف: الثالث الأساسي **المحور الرئيس: الجبر (الأنماط)**

النتاجات العامة للمحور	النتاجات العامة للصف	النتاجات الخاصة للصف
يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يحلل خصائص الأشكال الهندسية ذات البعدين وذات الأبعاد الثلاثة ويطور حججاً رياضية حول العلاقات الهندسية.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: - يستقصي خصائص الأشكال ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد باستخدام الأدوات الملموسة والرسم.	يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن: ٣-٣٠ يصف مجسمات ثلاثية الأبعاد ويسميها، مثل (المكعب، الكرة، المخروط، الأسطوانة، الهرم، المنشور) ويستخدم مسميات الأشكال ثنائية الأبعاد لوصف أوجهها. ٣-٣١ يصف العلاقات بين الأشكال ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد مثل (المربع، المكعب)، (الدائرة، والكرة).

النتاجات الخاصة للصف	النتاجات العامة للصف	النتاجات العامة للمحور
٣-٣٢ يستخدم الأشكال ثنائية الأبعاد لصنع نماذج ثلاثية الأبعاد باستخدام أدوات بناء مختلفة مثل (ورق مقوى، عدة بناء). ٣-٣٣ يحل ألغازاً تتعلق بأشكال هندسية ثنائية الأبعاد مثل (بنى غطية). ٣-٣٤ يحدد خط التماثل لأشكال ثنائية الأبعاد (مثل استخدام طي الورق). ٣-٣٥ يطبق الدوران على أدوات محسوسة مثل ١/٢ دورة، ١/٤ دورة، ٣/٤ دورة).	- يستكشف التحويلات للأشكال الهندسية. - يستخدم اللغة بفاعلية لوصف المفاهيم الهندسية، التبرير، الاستقصاء.	- يطبق التحويلات الهندسية ويستخدم التماثل لتحليل وضعيات رياضية. - يستخدم الاستدلال البصري والمكاني والنماذج الهندسية لحل المسائل.

(١-٧) مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية (NCTM,2000) والأهداف المرتبطة بها:

برز في القرن الماضي الاهتمام بعلم الهندسة، فأصبح مادة حية ومركز جذب لنطلبة، لأنه الموضوع غير التقليدي في الرياضيات، فالطالب من خلاله يعمل ويلعب أثناء تعلمه، وبلغ هذا الاهتمام أوجه عندما أوصى المجلس القومي لمعلمي الرياضيات الأمريكي (National Council of Teachers of Mathematics)، في مؤتمره المنعقد سنة ١٩٨٩ إلى ضرورة زيادة التركيز على الهندسة في جميع المستويات، واعتبارها من أبرز معايير عقد التسعينيات في القرن العشرين، ذلك أن المعرفة الهندسية وإدراك علاقاتها أمران مرتبطان ببيئة الفرد وحياته اليومية، علاوة على ارتباطهما الوثيق بمواضيع رياضية وعلمية أخرى، مما يشير إلى اهتمام أكبر بالهندسة وكيفية تدريسها. حيث أصدر هذا المجلس عام ١٩٨٩م وثيقة تضمنت أربعة وخمسين معياراً مقسمة إلى أربع فئات هي:

١. فئة رياض الأطفال إلى الصف الثاني.

٢. فئة الصف الثالث إلى الصف الخامس.

٣. فئة الصف الخامس إلى الصف الثامن.
٤. فئة الصف التاسع إلى الصف الثاني عشر.

أصدر المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة (NCTM) عام ٢٠٠٠ وثيقة مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية، نقدم فيما يلي موجزاً لأهم البنود التي شملتها هذه الوثيقة وهي تحوي ستة مبادئ وخمسة معايير للمحتوى وخمسة معايير للعمليات في الرياضيات المدرسية وتشكل المبادئ مع المعايير رؤية مشتركة ترشد التربويين في جهودهم نحو تطوير تعليم الرياضيات في المدارس.

مبادئ الرياضيات المدرسية Principles for School Mathematics

المبادئ هي عبارات محددة تعكس القواعد الأساسية والجوهرية لتعليم الرياضيات ذات النوعية العالية. إن القرارات التربوية التي يتخذها التربويون تكون ذات أهمية بالغة للطلبة والمجتمع. وتقدم مبادئ الرياضيات المدرسية دليلاً مرجعياً في صناعة هذه القرارات.

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلبة من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K-12) من:

مبدأ المساواة The Equity Principle

يتطلب مبدأ المساواة في الرياضيات توقعات عالية ودعم قوي لجميع الطلبة من حيث توفير الفرص التعليمية لجميع الطلبة بغض النظر عن خصائصهم الشخصية وخلفياتهم لدراسة الرياضيات وتعلمها. وتقوم المساواة على الأسس الآتية:

١. تتطلب المساواة توقعات عالية وفرصاً تعليمية للجميع.
٢. تتطلب المساواة استيعاب الفروق الفردية بين الطلبة لمساعدة الجميع على تعلم الرياضيات.
٣. تتطلب المساواة توفير المصادر والدعم للجميع: معلمين وطلبة.

مبدأ المنهج The Curriculum Principle

يعتبر المنهج أكثر من مجرد تجميع للأنشطة ويقوم منهج الرياضيات على الأسس التالية:

١. أن يكون متناسقاً ويركز على الرياضيات المهمة.

٢. أن يكون مترابطاً باتساق عبر الصفوف الدراسية.

مبدأ التعليم The Teaching Principle

يحتاج تعليم الرياضيات الفعال فهم ما يعرفه الطلبة وما يحتاجون تعلمه ثم تحديهم ودعمهم لتعلمه جيداً. ويقوم تعليم الرياضيات على الأسس الآتية:

١. يتطلب التدريس الفعال معرفة وفهم الرياضيات وفهم الطلبة كمتعلمين إضافة إلى المعرفة والتمكن من استراتيجيات التدريس المناسبة.

٢. يتطلب التدريس الفعال بيئة صفية تثير التحدي وتوفر المساعدة والدعم.

٣. يتطلب التدريس الفعال السعي المستمر نحو التحسين.

مبدأ التعلم The Learning Principle

يجب أن يتعلم الطلبة الرياضيات مع الفهم والبناء الفعال للمعلومات الجديدة من المعلومات السابقة، ويقوم تعلم الرياضيات على الأسس الآتية:

١. تعلم الرياضيات المقرون بالفهم ضروري وأساسي.

٢. يستطيع الطلاب تعلم الرياضيات وفهمها.

مبدأ التقييم The Assessment Principle

لا بد أن يدعم التقييم التعلم للرياضيات المهمة ويجهز المعلومات المفيدة لكل من المعلمين والطلبة، ويقوم تقييم تعلم الرياضيات على الأسس التالية:

١. التقييم الجيد يدعم التعلم الجيد للطلبة.

٢. التقييم أداة مهمة لاتخاذ القرارات المهمة المتعلقة بالتدريس.

مبدأ التقنية The Technology Principle

تعتبر التقنية عنصراً أساسياً في تعلم وتعلم الرياضيات؛ فهي تؤثر في الرياضيات التي تعلم وتحسن تعلم الطلبة، وتقوم التقنية في تعلم الرياضيات على الأسس التالية:

١. التقنية تدعم تعلم الطلبة.
٢. التقنية تدعم التعليم الفعال للرياضيات.
٣. التقنية لها أثر في نوعية الرياضيات التي يجري تدريسها.

معايير الرياضيات المدرسية (Standards for School Mathematics)

وضع الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة (NCTM) معايير تصف الفهم والمعلومات والمهارات الرياضية التي يجب أن يحصل عليها الطلاب من مرحلة ما قبل الروضة وحتى الصف الثاني عشر، وتقسم المعايير إلى:

١. معايير المحتوى: وهذه المعايير تصف ما يجب أن يتعلمه الطلاب، وتشمل: الأعداد والعمليات، والجبر، والهندسة، والقياس، وتحليل البيانات والاحتمالات.
٢. معايير العمليات: وهذه المعايير تشمل طرق اكتساب واستخدام المعرف ذات العلاقة بالمحتوى، وتشمل: حل المسألة والتفكير الرياضي والبرهان، والاتصال، والربط، والتمثيل.(جبر وفوارعة، ٢٠١١)

أولاً: معايير المحتوى:

سأقتصر هنا في عرض معايير المحتوى للهندسة والقياس محور هذا الكتاب:

١) معايير المحتوى للهندسة (Geometry):

الهندسة هي الموضوع الرئيس في الرياضيات، فهي تساعد على وصف البيئة وفهمها وتنمية مهارات التفكير المنطقي والتبرير، وتصل ذروتها في العمل مع البراهين في الصفوف العليا، وتلعب دورًا هامًا في النمذجة الرياضية وحل

المشكلات، وتجدر الإشارة هنا إلى أن للتكنولوجيا دورًا هامًا ورئيسيًا في تعليم وتعلم الهندسة، ويتضمن معيار الهندسة التركيز على التفكير الهندسي ومهارات التفكير المنطقي من خلال المعايير الفرعية الآتية:

- تحليل خصائص وصفات الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد وتنمية الحجج الرياضية عن العلاقات الهندسية:

حيث يميل الأطفال بطبيعتهم إلى ملاحظة الأشكال ووصفها ووصف خصائصها، ويستطيع الأطفال تعلم الأشكال الهندسية باستخدام المحسوسات، وبعد ذلك تصبح دراسة خصائص الأشكال وصفاتها أكثر تجريدا. وفي جميع المستويات يجب أن يتعلم الطلاب صيغ تفسيرات مقنعة لتخميناتهم وحلولهم.

- تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام الهندسة الإحداثية وأنظمة التمثيل الأخرى: يتعلم الأطفال في البداية مفاهيم الموقع النسبي، مثل فوق، خلف، قريب، بين، وبعد ذلك يستطيعون عمل واستخدام شبكات مستطيلة لتحديد مواقع الأجسام وقياس المسافة بين نقاط على خطوط عمودية أو أفقية. وفي الصفوف المتوسطة والثانوية يكون المستوى الإحداثي مفيدا لاكتشاف وتحليل خصائص الأشكال، وتحديد المواقع والمسافات. وتعمل الهندسة الإحداثية علة الربط بين الجبر والهندسة.

- تطبيق التحويلات الهندسية والتماثلات لتحليل المواقف الرياضية: يأتي الأطفال الصغار إلى المدرسة وهم يملكون حدسا عن كيفية تحريك الأشكال وبإمكانهم استكشاف أنواع الحركات مثل الانزلاق والانقلاب والانعكاس باستخدام طي الأوراق أو الرسم على الورق الشفاف أو المرايا.

- استخدام التصور الذهني والتفكير المكاني والنمذجة الهندسية لحل المشكلات: يجب أن يطور الطلاب في السنوات الأولى مهارات تصورية من خلال تجارب عملية مع الأجسام الهندسية وبعد ذلك بإمكان الطلاب التحويل من الموقع المادي إلى التصوري العقلي والنمذجة (NCTM 2000).

الأهداف المرتبطة بمعايير الهندسة (حمزة والبلاونة، ٢٠١١):

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة – الثاني أن:

- يتعرف ويسمي ويبني ويرسم ويقارن ويصنف الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يصف خصائص وأجزاء الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يستقصي ويتنبأ بنتائج ضم وتجزيء الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يصف ويسمي ويفسر الأماكن النسبية في الفراغ ويطبق الأفكار عن المكان النسبي (فوق، تحت، قريب، بعيد، بين).
- يصف ويسمي ويفسر الاتجاه والمسافة في الفراغ ويطبق الأفكار عن الاتجاه والمسافة (يمين، يسار، المسافة والقياس).
- يجد ويسمي الأماكن مستخدماً العلاقات البسيطة مثل قريب من وفي الأنظمة الإحداثية مثل الخارطة.
- يتعرف ويطبق الإزاحة والالتفاف والانعكاس.
- يتعرف وينتج أشكالا لها تناظرات.
- ينتج صوراً ذهنية للأشكال الهندسية مستخدماً الذاكرة الفراغية والتمثيل البصري الفراغي.
- يتعرف ويمثل الأشكال من وجهات مختلفة.
- يرجع الأفكار في الهندسة إلى الأفكار في الأعداد والقياس.
- يتعرف الأشكال والبنى في البيئة ويحدد مواقعها.

يجب على الطالب في الصفوف من ٣ – ٥ أن:

- يعين ويقارن ويحلل خصائص الأشكال ذات البعدين وثلاثية الأبعاد وينمي مجموعة مفردات يصف بها تلك الخصائص.
- يصنف الأشكال ذات البعدين وثلاثية الأبعاد طبقاً لخصائصها وينمي تعريفات لأصناف الأشكال مثل المثلثات والأهرامات.

- يستقصي ويصف ويبرر نتائج تقسيم وجمع وتحويل الأشكال.
- يستكشف التطابق والتشابه.
- يكون ويختبر التخمينات (الحدس الرياضي) عن الخصائص الهندسية والعلاقات وينمي حجج منطقية لتبرير النتائج.
- يصف المواقع والحركة مستخدماً اللغة العادية والمفردات الهندسية.
- ينشئ ويستخدم الأنظمة الإحداثية لتحديد المواقع ويصف المسارات.
- يوجد المسافة بينا لنقط على الخطوط الأفقية والرأسية للنظام الإحداثي.
- يتنبأ ويصف النتائج للإزاحة والانعكاس والتدوير للأشكال ذات البعدين.
- يصف الحركة أو سلسلة الحركات التي سوف توضح أن الشكلين متطابقان.
- يعين ويصف خط التماثل والدوران في الأشكال والتصميمات ذات البعدين وثلاثية الأبعاد.
- يبني ويرسم الأشياء الهندسية.
- يكون ويصف تصورات ذهنية للأشياء والأنماط والمسارات.
- يعين ويبني الشيء ثلاثي الأبعاد من تمثيلات ذات بعدين لذلك الشيء.
- يعين ويبني تمثيلاً ذا بعدين لشيء ثلاثي الأبعاد.
- يستخدم نموذجاً هندسياً لحل المشكلات في مجالات رياضية أخرى مثل الأعداد والقياس.
- يجد ويسمي الأماكن مستخدماً العلاقات البسيطة مثل قريب من وفي الأنظمة الإحداثية مثل الخارطة.
- يتعرف ويطبق الإزاحة والالتفاف والانعكاس.
- يتعرف وينتج أشكالا لها تناظرات.

- ينتج صوراً ذهنية للأشكال الهندسية مستخدماً الذاكرة الفراغية والتمثيل البصري الفراغي.
- يتعرف ويمثل الأشكال من وجهات مختلفة.
- يرجع الأفكار في الهندسة إلى الأفكار في الأعداد والقياس.
- يتعرف الأشكال والبنى في البيئة ويحدد مواقعها.

٢) معايير المحتوى للقياس Measurement

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلبة من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K- 12) من:

- إدراك قابلية الأشياء للقياس وإدراك الوحدات، والنظم، وإجراءات القياس.
- استخدام التقنيات المناسبة، والأدوات والصيغ لتحديد القياسات.

الأهداف المرتبطة بمعايير القياس:

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة – الثاني أن:

- يتعرف خصائص الطول والحجم والوزن والمساحة والزمن.
- يقارن ويرتب الأشياء طبقاً لهذه الخصائص.
- يفهم كيف يقيس مستخدماً الوحدات القياسية وغير القياسية.
- يختار الوحدة والإدارة المناسبة للخاصية المراد قياسها.
- يقيس بنسخ مكررة لوحدات لها نفس الحجم مثل قصاصات الورق المرصوصة بنهاية بعضها.
- يستخدم تكراراً لوحدة واحدة لقياس شيء أكبر من الوحدة نفسها على سبيل المثال قياس طول غرفة بعصا طولها متر واحد.
- يستخدم أدوات القياس.
- يطور مرجعية عامة للقياسات لعمل المقارنات والتقديرات.

يجب على الطالب في الصفوف ٣ –٥ أن:

- يفهم السمات مثل الطول والمساحة والوزن والحجم وانفراج الزاوية ويختار نوع الوحدة المناسبة لقياس كل سمة.
- يفهم الحاجة للقياس باستخدام وحدات معيارية ويألف التعامل مع الوحدات المعيارية في الأنظمة التقليدية والمترية.
- يتمم تحويلات بسيطة لوحدة القياس مثل التحويل من السنتيمترات إلى الأمتار ضمن نظام القياس.
- يفهم أن القياسات تقريبية ويستنتج كيف أن الفروق في الوحدات يؤثر على دقة القياس.
- يكتشف ماذا يحدث لقياسات الشكل ذي البعدين مثل محيطه ومساحته عندما يتم تغيير الشكل بطريقة ما.
- يطور استراتيجيات لتقدير المحيطات والمساحات والحجوم للأشكال غير المنتظمة.
- يختار ويطبق وحدات معيارية مناسبة وأدوات لقياس الطول والمساحة والحجم والوزن والوقت والحرارة والزاوية.
- يختار ويستخدم علامات لتقدير القياسات.
- يطور ويفهم ويستخدم صيغاً لإيجاد مساحة المستطيلات والمثلثات ومتوازيات الأضلاع.
- يطور استراتيجيات لحساب المساحة السطحية والحجم لمتوازي المستطيلات.

ثانياً: معايير العمليات الرياضية (Standards for Mathematical Operations)

١- حل المشكلات (Problem Solving)

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلبة من الروضة للصف الثاني عشر (K- 12) من:

- بناء معرفة جديدة من خلال حل المشكلات
- حل المشكلات في الرياضيات وفي المساقات الأخرى
- استخدام الاستراتيجية المناسبة لحل المشكلات
- التأمل في عملية حل المشكلة الرياضية (إجراءات الحل)

٢- التفكير والبرهان (Thinking and Proofing)

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلبة من الروضة للصف الثاني عشر (K- 12) من:

- تطوير وتقويم الحجج والبراهين الرياضية.
- اختيار واستخدام أنواعا مختلفة من التبريرات وطرق البرهان.

٣- الإتصال (Communication)

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلبة من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K- 12) من:

- تنظيم وتعزيز تفكيرهم الرياضي من خلال التواصل.
- نقل تفكيرهم الرياضي مترابطاً وواضحاً إلى أقرانهم ومعلميهم والآخرين.
- تحليل وتقويم التفكير الرياضي للآخرين واستراتيجياتهم.
- استخدام لغة الرياضيات للتعبير عن الأفكار الرياضية بدقة.
- الترابط (Connection)

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K- 12) من:

- تعرف واستخدام التداخل خلال الأفكار الرياضية.
- فهم كيفية أن الأفكار الرياضية متداخلة ومبنية فوق بعضها لتنتج بناء واحداً مترابطاً.

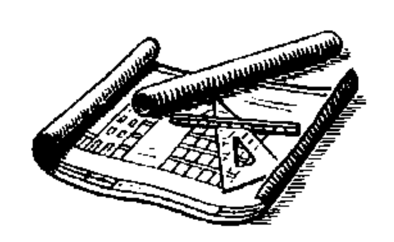
٥- التمثيل Representaion

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K- 12) من:

- بناء واستخدام تمثيلات لتنظيم وتسجيل وتواصل الأفكار الرياضية.
- اختيار وتطبيق وترجمة التمثيلات الرياضية لحل المشكلات.
- استخدام التمثيلات لنمذجة وتفسير الظواهر الطبيعية والاجتماعية والرياضية.

الوحدة الثانية

الهندسة ومفاهيمها الأساسية



الوحدة الثانية
الهندسة ومفاهيمها الأساسية

(٢-١) مقدمة:

تعتبر الهندسة الإقليدية بوجه عام، والهندسة الفضائية بوجه خاص، من حقول الرياضيات التي قدمت العديد من المواضيع والمسائل الهامة. ومما لا شك فيه أن التلاميذ يواجهون صعوبات جمة في التعامل مع الهندسة، وهو ما جعل العديد من الإصلاحات تتخلى عن دروس في الهندسة تجنباً لتلك الصعوبات.

لكن الحل في هذا المجال العلمي ليس في الابتعاد عن الصعوبات بل يكمن الحل في البحث عن أفضل السبل التي تساعد التلميذ على استيعاب مثل هذه الدروس... كما استوعبها سابقوه، سيما أن الجميع يؤكد على دور الهندسة في صقل فكر التلميذ عندما يتعلق الأمر بالبرهان الرياضي.

يعتبر التعامل مع الهندسة النشاط الرياضي القريب من مستلزمات الحياة اليومية التي نجد فيها كل الأشكال الهندسية في المستوي وفي الفضاء. كما أن الهندسة تساعد على الارتقاء من الملموس إلى المجرد في مجال الرياضيات وغيره. فهي تتطلب من المتعامل معها أن يتمثل الفضاء ومفهوم الاتجاه... وأن يركز في التحليل والاستنتاج.

وعليه فإن أهمية الهندسة، وبوجه خاص الهندسة الفضائية، تبدو بالغة الأهمية لدعم التفكير الرياضي.

نقدم في هذه الوحدة المفاهيم الأساسية في الهندسة مع التركيز على البعض منها.

(٢-٢) النقطة والمستقيم والمستوى



- **النقطة**

يمكن وصفها على انها:

١. أثر قلم رصاص مدبب على ورقة بيضاء.
٢. رأس دبوس.
٣. يمكن ان تمثل موقعاً جغرافياً أو مدينة على الخريطة.

■ **القطعة المستقيمة**

وهو الشكل الناتج عن الوصل بين نقطتين.

أ ب

يُرمز لها أَبَ و تُقرأ القطعة المستقيمة أب

■ **الشعاع**

وهو قطعة مستقيمة لها بداية وليس لها نهاية.

ويُرمز لها أب

أ ب

■ **الخط المستقيم**

وهو شكل هندسي ليس له بداية وليس له نهاية.

ويرْمز له أب

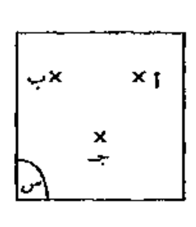
أ ب

■ **المستوى**

- هو أي سطح مستوي، كسطح الطاولة مثلاً، أو ورقة، أو السبورة.
- يمكن مدّه من الجوانب كافة بلا نهاية.

ملاحظة:

المستقيم في المستوي أو في الفضاء يعيّن بنقطتين. أما المستوي في الفضاء فيعيّن بثلاث نقاط غير مستقيمة. كما يعيّن أيضا بمستقيمين متقاطعين ذلك أن المستقيم الأول يعيّن بنقطة التقاطع ونقطة ثانية ويعيّن المستقيم الثاني بنقطة التقاطع ونقطة ثالثة.

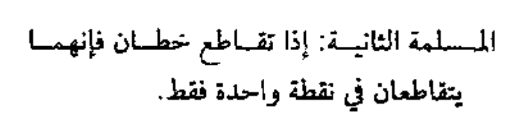


مثال: يسمى هذا المستوى: المستوى (أ ب جـ) أو المستوى (س).

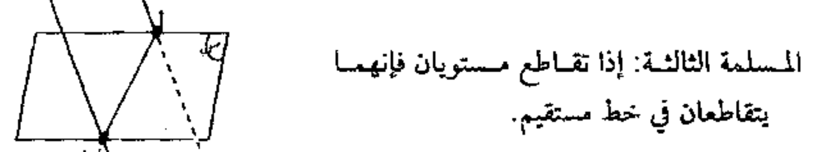
مسلمات الهندسة الفضائية:

هناك مسلمات في الهندسة الفضائية تمثل الأساس الذي تقوم عليها هذه الهندسة. ومن أمثلة هذه المسلمات:

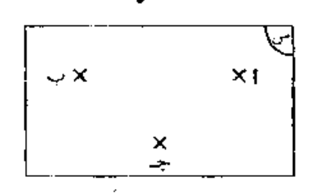
المسلمة الأولى: يمرّ مستقيم واحد من كل نقطتين معلومتين في الفضاء.



المسلمة الثانية: إذا تقاطع خطان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.



المسلمة الثالثة: إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في خط مستقيم.



المسلمة الرابعة: أي ثلاث نقاط غير مستقيمة تحدد مستوى.

العلاقة بين المستقيمات في المستوى

١) مستقيمات متوازية: وهي المستقيمات التي لا تلتقي مهما امتدت، وتقع في مستوى واحد.

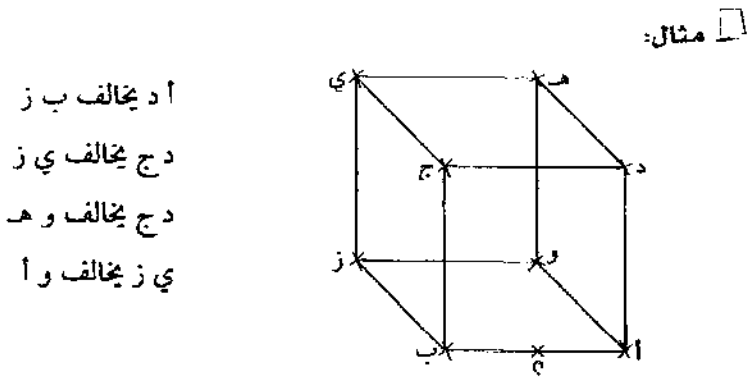
٢) مستقيمات غير متوازية (متقاطعة): وهي مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة فقط عند مدها.

ملاحظة:

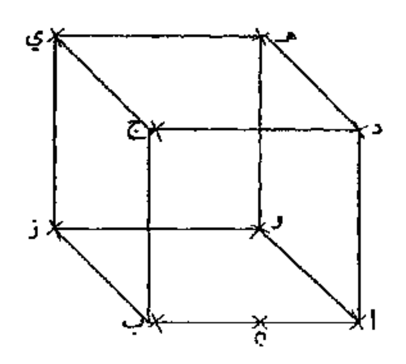
إذا تقاطع مستقيمان بنقطة وكوّنا زاوية قائمة قياسها ٩٠ درجة فإن المستقيمان متعامدان.

٣) المستقيمات المتخالفة: يسمى المستقيمان متخالفان إذا لم يحويهما نفس المستوى

مثال:



مثال:



بإستخدام الشكل المعطى أعطي مثال على ما يلي:

١. ثلاثة نقاط مستقيمة:

أ م ب

٢. ثلاثة نقاط مستوية:

ب ز ي (⊥) مع

٣. خمس نقاط مستوية:

أ، م، ب، ج، د

٤. مستقيمين متعامدين:

د أ ⊥ أ ب

٥. مستقيمين متوازين:

أ ب // ج د

هـ د // ي ج

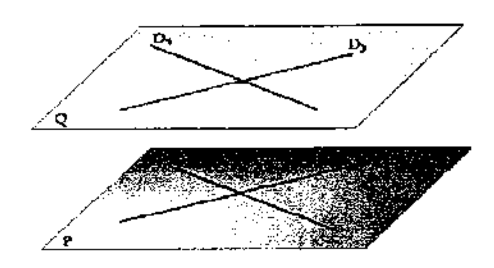
٦. مستقيمين متخالفين:

أ د ، ب ز

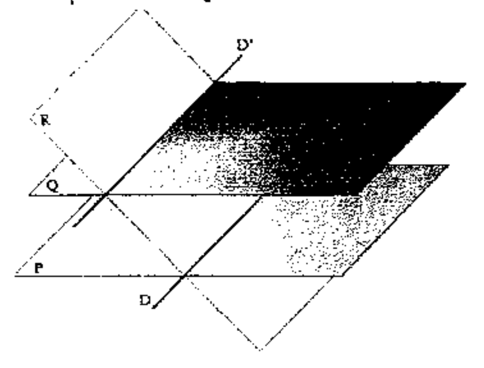
ي ز ، و أ

العلاقة بين المستويات في الفضاء:

١) نقول إن مستويين متوازيان إذا كانا متطابقين أو كان تقاطعهما خالياً.

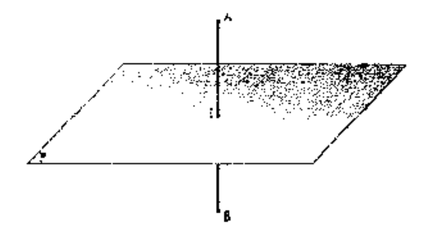


٢) يكون المستويين متقاطعين إذا اشتركا في خط مستقيم.

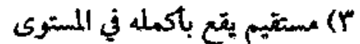


العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء:

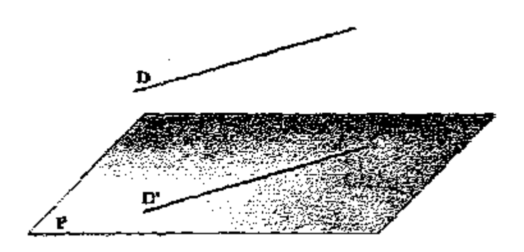
١) مستقيم يتقاطع مع المستوى: إذا اشتركا في نقطة واحدة فقط.



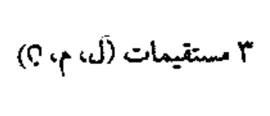
٢) مستقيم يوازي مستوي: إذا كان تقاطعهما خاليا لا يشتركان في أي نقطة.

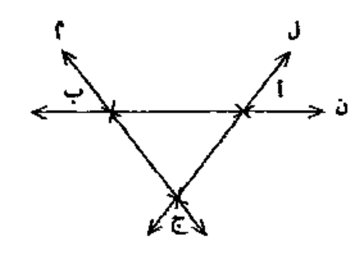


٣) مستقيم يقع بأكمله في المستوى



مثال: كم مستقيم يمكن رسمهُ بحيث يمر بنقطتين ممن بين ثلاثة نقاط غير مستقيمة



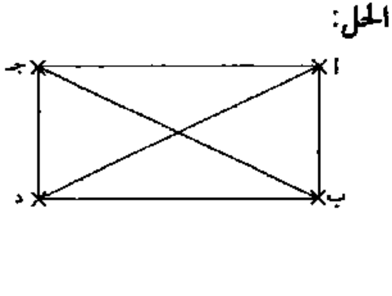


مثال: كم مستقيم يمكن رسمهُ بحيث يمر بثلاثة نقاط من بين ثلاثة نقاط غير مستقيمة؟

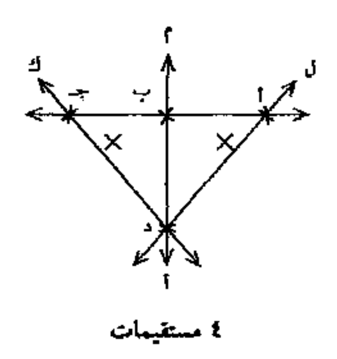
* سؤال:

كم مستقيم يمكن رسمهُ بحيث يمر بنقطتين على الأقل من بين (٤) نقاط غير مستقيمة

الحل:



٦ مستقيمات



٤ مستقيمات

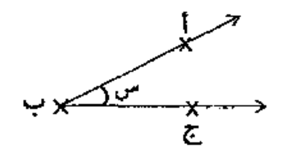
(٢-٣) الزوايا (Angles)

* الزاوية: هي تقاطع شعاعين من نقطة واحدة ويسمى كل شعاع ضلعاً لزاوية وتسمى النقطة برأس الزاوية تُصنف الزوايا حسب قياسها والزاويتان المتساويتين في القياس تكونان متطابقين

* تسمية الزاوية:

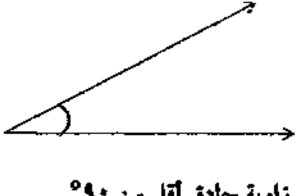
١. ∢ أ ب ج (ثلاثة أحرف)

٢. ∢ س (حرف على رأس الزاوية)



* أنواع الزوايا:

١. زاوية حادة (actue angle) هي زاوية قياسها أكبر من صفر وأقل من ٩٠°.



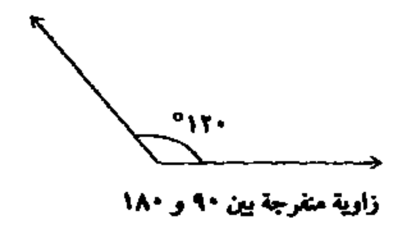
زاوية حادة أقل من ٩٠°

٢. زاوية قائمة (right – angle) هي زاوية قياسها ٩٠°

٩٠°

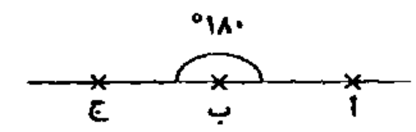
زاوية قائمة ٩٠°

٣. زاويـة منفرجـة (obtus – angle)
هي زاويـة قياسـها أكـبر مـن ٩٠°
وأقل من ١٨٠°

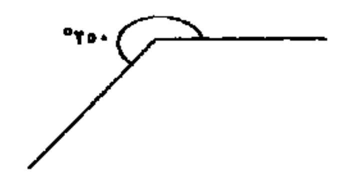


زاوية منفرجة بين ٩٠ و ١٨٠

٤. زاويـة مـستقيمة: يكـون قياسـها
١٨٠° (straight angle)



٥. زاوية منعكسة: يكون قياسها أكبر
من ١٨٠° وأقل من ٣٦٠°



قياس الزوايا:

تقاس الزاوية بوحدة الدرجة ويرمز لها (°) (DEGREE)

* **أجزاء الزاوية هي (درجة) و (دقيقة) و (ثانية)**

١. الدرجة يرمز لها (°)

٢. الدقيقة يرمز لها (′) ١° = ٦٠′

٣. الثواني (″) ١′ = ٦٠″

ملاحظة:

لا يجوز أن تكون الثواني أو الدقائق أكثر من (٥٩).

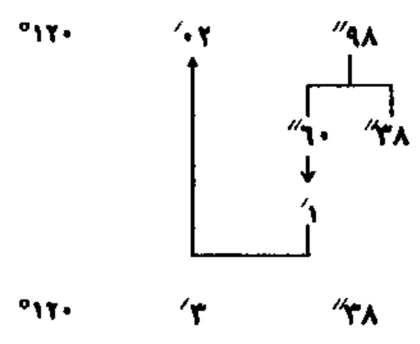
مثال: زاوية قياسها

٦٢° ٤٥′ ٧٠″

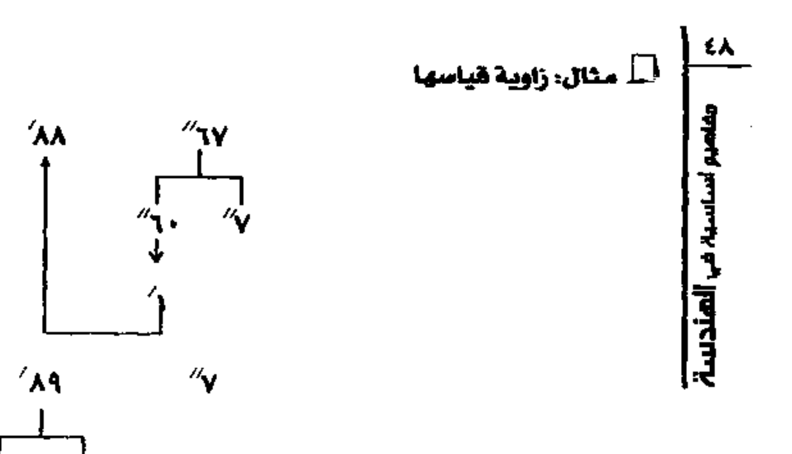
١٠″ ٦٠″ = ١′

٦٢° ٤٦′ ١٠″

مثال: زاوية قياسها



مثال: زاوية قياسها



٧'' ٨٩' ٢٤٥°

٢٩' ٦٠'

٥°

٧'' ٢٩' ٢٤٦°

* سؤال:

∠أ = ٤٥'' ١٤' ٣٦°

∠ب = ٣٠'' ٤٦' ٧٠°

∠ج = ٧'' ١٦' ١٥°

* جد ما يلي:

١. ∠أ + ∠ج

∠أ = ٤٥'' ١٤' ٣٦°

+

∠ج = ٧'' ١٦' ١٥°

٥٢'' ٣٠' ٥١°

٢. ∢أ + ∢ب

١′

∢أ = ٤٥″ ١٤′ ٣٦°

\+

∢ب = ٣٠″ ٤٦′ ٧٠°

٧٥″ ٦١′ ٩١°

١٥″ ٦٠″ ← ١′   ١′ ٦٠′ ← ١°   ١٠٦°

= ١٥″ ١′ ١٠٧°

٣. ∢ب − ∢ج

− ٣٠″ ٤٦′ ٧٠°

٧″ ١٦′ ١٥°

٢٣″ ٣٠′ ٥٥°

٤. ∢ج − ∢أ

− ٤٥″ ١٤′ ٣٦°

٧″ ١٦′ ١٥°

−٣٨″ ٥٨′ ٢٠°

٥. (∢ج − ∢ب) + ∢أ

* سؤال: ∢ اب جـ = ٥٠″ ٣٥′ ٤٢°

∢ د هـ و = ٤٧″ ٢٧′ ٨٠°

المطلوب:

جد ما يلي

١. ∢ اب جـ + ∢ د هـ و

٢. ∢ د هـ و - ∢ اب جـ

٣. ∢ اب جـ - ∢ د هـ و

الحل:

١. ∢ اب جـ + ∢ د هـ و

∢ ب = ٥٠″ ٣٥′ ٤٢°

+

∢ هـ = ٤٧″ ٢٧′ ٨٠°

٩٧″ ٢٧′ ٨٠°

٩٧″ (٦٢′+١′) ١٢٣°

٦٠″

٣′ ٦٠′ =

⇐ الجواب

النهائي = ٣٧″ ٣′ ١٢٣°

الحل:

٢. ∢ د هـ و − ∢ أ ب جـ =

∢ هـ	=	″٤٧	′٢٧	°٨٠
∢ ب	=	″٥٠	′٣٥	°٤٢
		″٥٧	′٥١	°٣٧

الحل:

٣. ∢ أ ب ج − ∢ د هـ و = −

∢ هـ	=	″٤٧	′٢٧	°٨٠
−				
∢ ب	=	″٥٠	′٣٥	°٤٢
		″٥٧−	′٥١	°٣٧

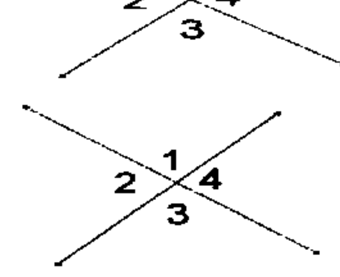
العلاقات بين الزوايا

*** الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيمين:**

١) الزاويتان المتكاملتان وهما زاويتين متجاورتين على خط مستقيم مجموعهما ١٨٠ درجة.

∢١ + ∢ ٤ = ١٨٠ درجة

∢ ٢ + ∢ ٣ = ١٨٠ درجة



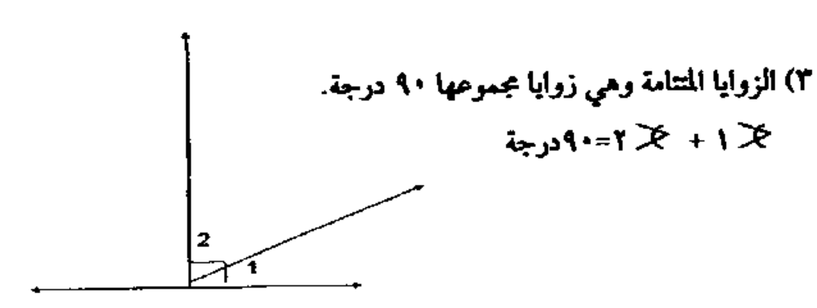
٢) الزاويتان المتقابلتان بالرأس هما زاويتـان لهمـا الـرأس نفـسه وتقعـان في جهـتين مختلفين، وهي زوايا متساوية.

∢ ٣ = ∢ ١

∢ ٤ = ∢ ٢

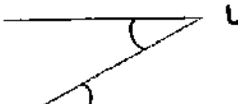
٣) الزوايا المتتامة وهي زوايا مجموعها ٩٠ درجة.

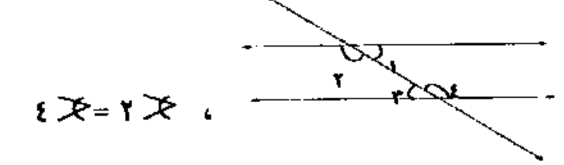
∠١ + ∠٢ = ٩٠ درجة



* الزوايا الناتجة من مستقيمين يقطعها مستقيم ثالث في المستوى

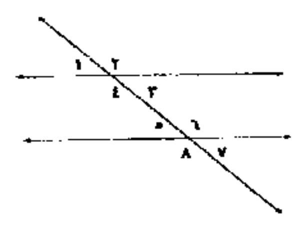
٤) الزوايا المتبادلة: وهما زاويتين داخليتين كل منهما على جهة، الإثنتان داخليتان وتشكل حرف Z





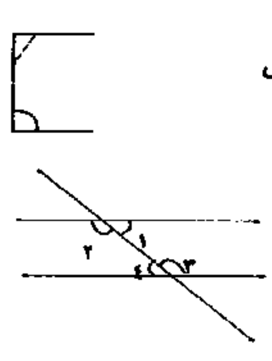
∠١ = ∠٣ ، ∠٢ = ∠٤

٥) الزوايا المتناظرة وهما زاويتين كلاهما على نفس الجهة، واحدة داخلية والأخرى خارجية وتشكلان حرف F.



∠١ = ∠٥ ، ∠٢ = ∠٦ ، ∠٤ = ∠٨ ، ∠٣ = ∠٧

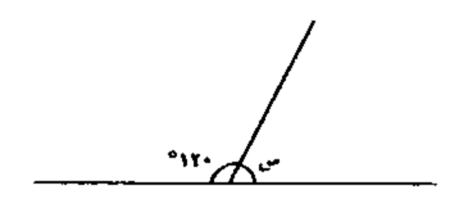
٦) الزوايا المتحالفة: وهي زاويتين داخليتين على نفس الجهة، ويكون مجموعهما ١٨٠ درجة.



∢ ١ + ∢ ٣ = ١٨٠ درجة

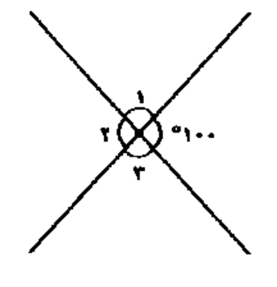
∢ ٢ + ∢ ٤ = ١٨٠ درجة

٭ سؤال: جد قيمة ∢ س في الشكل



∢ س = ١٨٠° - ١٢٠ = ٦٠° (زاويتين متكاملتين)

٭ سؤال: في الشكل المجاور الزوايا المرقمة



∢ ٢ = ١٠٠° (بالتقابل بالرأس مع المعطاه)

∢ ١ = ١٨٠° - ١٠٠ = ٨٠°

(زاوية مستقيمة أو متكاملة مع الزاوية المعطاة)

∢ ٣ = ٨٠° (تقابل بالرأس مع ∢١)

* **سؤال: في الشكل المجاور جد قيم الزوايا المرقمة**

الحل: ∢ ١ = ١٨٠° - ٧٠ = ١١٠°

بسبب أنها زاوية مستقيمة (متكاملة) مع الزاوية المعطاة

∢ ٥ = ١١٠° بسبب تقابل بالرأس مع ∢١

∢ ٢ = ١٨٠° - ٧٠° = ١١٠°

بسبب التحالف مع زاوية المعطاة

∢ ٤ = ١١٠° بسبب تقابل بالرأس مع ∢ ٢

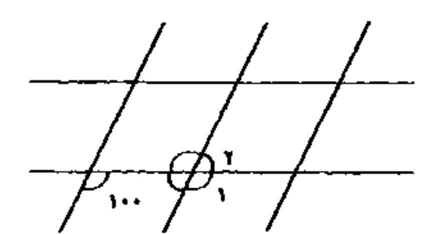
∢ ٣ = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠° بسبب زاوية مستقيمة مع ∢٢

∢ ٦ = ٧٠° بسبب تقابل بالرأس مع ∢٣

∢ ١ = ١٠٠° بسبب التناظر مع الزاوية المعطاة

∢ ٢ = ٨٠° بسبب تناظر مع المكملة المعطاة أو، زاوية مكملة للمعطاة أو متحالفة مع المقابلة بالرأس

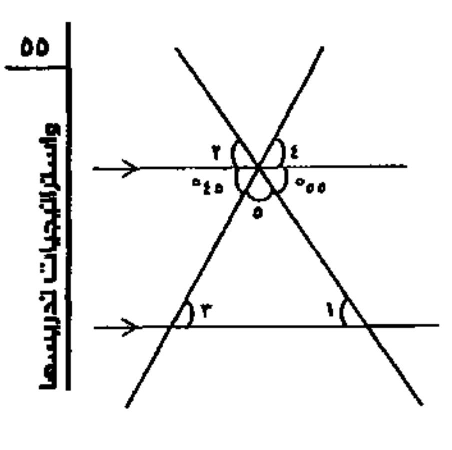
مثال: في الشكل التالي جد الزوايا المرقمة



الحل:

∢ ١ = ١٠٠° بسبب التناظر مع الزاوية المعطاة

∢ ٢ = ٨٠° (زاوية مستقيمة مع الزاوية ١)



*** سؤال: جد الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:**

الحل:

∡ ٣ = ٤٥° بالتبادل

∡ ٢ = ٥٥° بسبب التقابل بالرأس

∡ ٤ = ٤٥° بسبب التقابل بالرأس

∡ ١ = ٥٥° بسبب التبادل

مجموع زوايا المثلث ١٨٠°

⇐ ∡ ٥ = ١٨٠ − (٥٥ + ٤٥)

١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

*** نظرية: مجموعة زوايا المثلث الداخلية يساوي ١٨٠°**

الحل:

نرسم خط من النقطة أ يوازي ب جـ

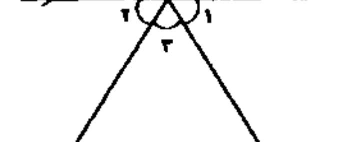
∡ ٥ + ∡ ١ + ∡ ٤ = ١٨٠°

.... (*)

زاوية مستقيمة متكاملة

∡ ٥ = ∡ ٢ بسبب التبادل

∡ ٤ = ∡ ٣ بسبب التبادل



نعوض في المعادلة (*)

∡ ٢ + ∡ ٣ + ∡ ١ = ١٨٠°

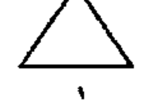
وهو المطلوب

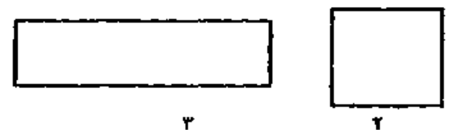
(٢-٤) المضلعات:

المضلع:

هو سطح مستو مغلق حدوده مجموعة خطوط مستقيمة. أو: هو أي شكل مستو محاط بعدة قطع مستقيمة متقاطعة مثنى مثنى.

أنظر إلى الأشكال التالية، لا شك أنك تعرف اسم كل واحد منها:





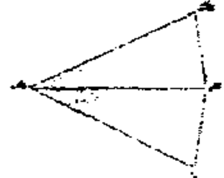
سؤال: ارسم بنفسك الأشكال التالية:

أ. شبه المنحرف.

ب. مستطيل طوله ٦ سم وارتفاعه ٤ سم.

ج. شكل رباعي أضلاعه غير متساوية وليس فيه أي ضلعين متوازيين

سؤال: ماذا نسمي النقاط ك، م، ن، هـ في الشكل الرباعي ك م ن هـ المجاور؟



- ماذا نسمي القطعة المستقيمة م هـ في الشكل؟
- كم قطراً يوجد للشكل الرباعي؟

تعريف القطر:

هو خط واصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع.

مجموع زوايا المضلع:

إن المثلث هو أقل المضلعات في عدد أضلاعه إن له ثلاثة أضلاع فقط وليس له أقطار (لماذا؟)

ومجموع قيم زواياه الثلاث = ١٨٠° (وبالقوائم زاويتين قائمتين) وهذه حقائق معروفة لك من دراستك السابقة.

تعلم أيضاً أن المربع (وهو مضلع رباعي) زواياه الأربع قوائم وبالتالي مجموع زواياه = ٣٦٠° (٤ قوائم).

والسؤال الآن هل مجموع زوايا المستطيل أربع قوائم؟ وهل مجموع زوايا متوازي الأضلاع أربع قوائم؟

وهل مجموع زوايا المعين أربع قوائم؟ وهل مجموع زوايا شبه المنحرف أربع قوائم؟ وهل مجموع زوايا أي شكل رباعي = ٤ قوائم.

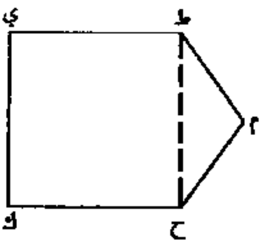
* نشاط: ارسم بنفسك شكلاً رباعياً مختلف الأضلاع، قس بأقصى ما يمكنك من الدقة قيمة كل زاوية من زواياه بالدرجات.

كم مجموع زوايا الشكل. هل المجموع قريب أم بعيد عن ٣٦٠ لماذا لم يكن مجموع الزوايا = ٣٦٠ بالضبط.

العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع زواياه:

نشاط استنتاجي: (www.schoolarabia.net)

١) الشكل ط ي ك ح م هو مضلع خماسي ونسميه اختصاراً، مخمس حيث الاسم مشتق من عدد الأضلاع. كيف نعرف مجموع قيم زواياه الخمس دون قياس؟ إذا وصلنا القطر ح ط انقسم المخمس إلى المثلث ح ط م، والشكل الرباعي ط ي ك ح.



إذن يمكن أن نكتب المخمس:

ط ي ك ح م = المثلث ح ط م + الشكل الرباعي ط ي ك ح.

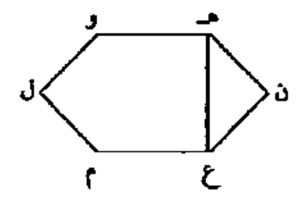
ونستطيع أن نقول مجموع زوايا المخمس

ط ي ك ح م = مجموع زوايا المثلث ح ط م + مجموع زوايا الشكل الرباعي ط ي ك ح.

= ١٨٠ + ٣٦٠

= ٥٤٠

أو مجموع زوايا المخمس ط ي ك ح م بالقوائم = ٢ + ٤ = ٦ قوائم.



٢) الشكل و ل م ع ن هـ هو شكل سداسي (مضلع له ستة أضلاع)، كيف نجد مجموع قيم زواياه بالدرجات أو بالقوائم دون قياس.

- إذا وصلنا القطر هـ ع ينقسم الشكل السداسي المعطى إلى مثلث ومخمس، إذن يمكن أن نكتب الشكل السداسي (المسدس)

و ل م ع ن هـ =المثلث هـ ع ن+الشكل الخماسي هـ ع م ل و

∴ مجموع زوايا المسدس و ل م ع ن هـ

= مجموع زوايا المثلث هـ ع ن + مجموع زوايا المخمس هـ ع م ل و

= ١٨٠ + ٥٤٠ = ٧٢٠.

وبالقوائم = $\frac{٧٢٠^\circ}{٩٠^\circ}$ = ٨ قوائم.

٣. ارسم بنفسك شكلاً سباعياً، وأوجد مجموع زواياه بالدرجات والقوائم.

٤. كرر العمل نفسه على المثمن (مضلع بثمانية أضلاع).

٥. ادرس الجدول التالي وأجب عن الأسئلة التالية:

١	٢	٣	٤
المضلع	مجموع زواياه بالدرجات	مجموع زواياه بالقوائم	(عدد أضلاع المضلع × ٢) ـ ٤
مثلث	١٨٠	٢	(٣ × ٢) – ٤ = ٢
رباعي	٣٦٠	٤	(٤ × ٢) – ٤ = ٤
مخمس	٥٤٠	٦	(٥ × ٢) – ٤ = ٦
مسدس	٧٢٠	٨	(٦ × ٢) – ٤ = ٨
مسبع	٩٠٠	١٠	(٧ × ٢) – ٤ = ١٠
مثمن			
متسع			
ذو ١٢ ضلعاً			
ذو ٣٥ ضلعاً			

أكمل الفراغات في العبارات التالية:

أ. كلما زاد عدد أضلاع المضلع ضلعاً واحداً عن سابقة يزداد مجموع زواياه بمقدار .... درجة.

ب. بمقارنة عمود (٣) مع عمود (٤) في الجدول نستطيع أن نكتب:

مجموع زوايا المضلع بالقوائم = (عدد أضلاعه × ....) ....

ج. مجموع زوايا شكل له ١٧ ضلعاً بالقوائم = ...

د. إذا كان مجموع زوايا مضلع عدد أضلاعه (ن) ضلعاً = ٢٠ قائمة. فإن مجموع زوايا مضلع عدد أضلاعه

ن ـ ١ = ... قائمة.

هـ. إذا كان مجموع زوايا مضلع = ٤٠ قائمة فإن عدد أضلاعه = ...

و. إذا كان مجموع زوايا مضلع = ٥٤٠٠ فإن عدد أضلاعه = ...

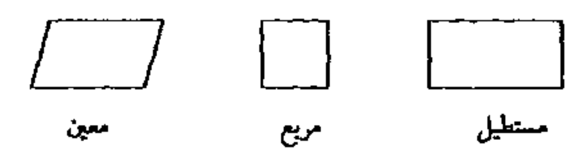
قاعدة

مجموع زوايا أي مضلع بالقوائم =٢ ن ـ ٤ حيث ن تدل على عدد الأضلاع

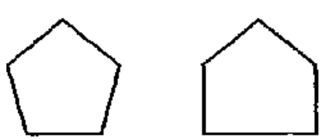
وبطريقة اخرى:

مجموع زوايا أي مضلع بالقوائم = (ن – ٢) × ١٨٠ حيث ن تدل على عدد الأضلاع

* مجموع زوايا الشكل الرباعي الداخلية = ٣٦٠°



* مجموع زوايا الشكل الخماسي الداخلية = ٥٤٠°



ملاحظة:

لإيجاد زاوية واحدة في الشكل الذي عدد أضلاعه ن

$$\angle س = \frac{\text{مجموع الزوايا الداخلية للمضلع}}{\text{عدد الأضلاع}} = \frac{(ن - ٢)\times ١٨٠}{ن}$$

* سؤال:

١. جد مجموع الشكل السباعي

(٧−٢) × ١٨٠°

٥ × ١٨٠° = ٩٠٠°

٢. في الشكل المجاور جد قياس ∢ س

(ن − ٢) × ١٨٠

(٦−٢) × ١٨٠

٤ × ١٨٠ = ٧٢٠

∢س = ٧٢٠ − (١٨٠+٣٠+١٢٠+٦٠+٧٠)

∴ ∢س = ٧٢٠° − ٤٦٠° = ٢٦٠°

ملاحظة:

عدد أقطار المضلع يعطى بالعلاقة:

$\frac{ن (ن - ٣)}{٢}$ ، حيث ن هي عدد أضلاع المضلع

مثال: كم عدد أقطار الشكل الخماسي؟

الحل:

$\frac{٥ (٥ - ٣)}{٢} = ٥$

(٢-٥) المضلعات المنتظمة Regular Polygon:

هو مضلع تكون أضلاعه متساوية في طولها وزواياه كلها متساوية في قياساتها.

مثال:

المخمس المنتظم: هو مضلع أضلاعه الخمسة متساوية وبالتالي تكون زواياه الخمس متساوية.

كم مجموع زوايا المخمس المنتظم؟

الجواب مجموع زوايا المخمس المنتظم = (٢ × ٥) ـ ٤

= ٦ قوائم.

= ٦ × ٩٠ = ٥٤٠

كم قيمة كل زاوية من زوايا المخمس المنتظم؟

الجواب = $\frac{٥٤٠^\circ}{٥}$ = ١٠٨.

★ سؤال: مضلع سداسي منتظم، جد قياس زاوية فيه

مجموع الزوايا الشكل السداسي = (ن-٢) ×١٨٠

= (٦-٢) ×١٨٠

= ٤×١٨٠° = ٧٢٠°

∴ الزاوية الواحدة = $\frac{٧٢٠^\circ}{٦}$ = ١٢٠°   ن = هو عدد أضلاع شكل

∴ قياس أحد الزوايا في المضلع المنتظم = $\frac{١٨٠×(ن-٢)}{ن}$

أمثلة محلولة:

١. ما مجموع زوايا مضلع عدد أضلاعه (١٢) بالدرجات ثم بالقوائم.

الحل:

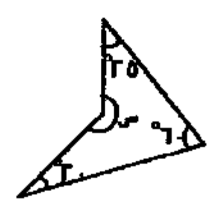
مجموع زوايا مضلع بالدرجات = (ن – ٢) × ١٨٠.

= (١٢– ٢) × ١٨٠ = ١٠ × ١٨٠

= ١٨٠٠

مجموع زوايا المضلع بالقوائم = (٢ن – ٤) = (٢ × ١٢ – ٤)

= (٢٤ – ٤) = ٢٠ قائمة.



٢. ما قيمة س بالدرجات فيما يلي.

الحل: لإيجاد قيمة س يجب أن نجد مجموع باقي الزوايا ٢٠ + ٢٥ + ٦٠ = ١٠٥.

ولأن الشكل رباعي فإن مجموع زواياه ٣٦٠

∴ س = ٣٦٠ ـ ١٠٥ = ٢٥٥

٣. مضلع منتظم قياس زاويته ١٢٠ ما عدد أضلاعه؟

الحل: نفرض أن عدد أضلاع المضلع ن.

مجموع زوايا المضلع = ن × ١٢٠

لكن مجموع زوايا المضلع = (ن ـ ٢) × ١٨٠.

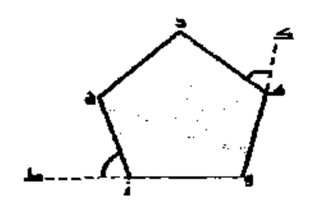
إذن ١٢٠ ن = ١٨٠ ن ـ ٣٦٠

..............................أكمل بنفسك

ملاحظة:

نسمي الزاوية الناتجة عن مد أحد الأضلاع على استقامته والضلع الآخر المجاور باسم الزاوية الخارجة.

مثال:



في الشكل المجاور ∢ح ز ط أو ∢ك هـ د هي زوايا خارجة.

أمثلة:

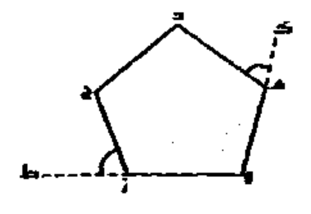
١. ما مقدار كل زاوية داخلة من زوايا المضلعات المنتظمة الآتية:

١. المثمن.

٢. الاثني عشر.

٣. الخمسة عشر.

٢. إذا مد أحد أضلاع مخمس منتظم على استقامته (كما في الشكل) فما مقدار الزاوية الخارجة.



٣. ما عدد أضلاع المضلع المنتظم إذا:

أ. كان مجموع زواياه الداخلة ٩٠٠.

ب. كان مجموع زواياه الداخلة ٣٦ قائمة.

ج. كانت زاويته الداخلة = ١٦٢.

د. إذا كانت زاويته الخارجة = ٣٠.

هـ. إذا كانت زاويته الخارجة = $\frac{١}{٤}$ مجاورتها الداخلة.

(٦-٢) المثلث



المثلث هو شكل هندسي مغلق يتكون من ثلاث أضلاع وثلاث زوايا.

عناصر المثلث:

يتكون المثلث من ست عناصر وهي (٣) أضلاع و (٣) زوايا (٣ رؤوس)

أنواع المثلثات حسب الزوايا

١) مثلث قائم الزاوية، وهو مثلث إحدى زواياه قائمة.

٢) مثلث حاد الزوايا، وهو مثلث جميع زواياه حادة.

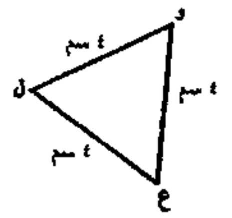
٣) مثلث منفرج الزاوية، وهو مثلث فيه زاوية منفرجة واحدة.

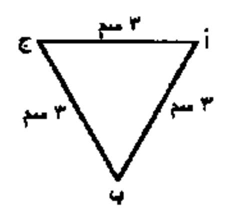
انواع المثلثات حسب الأضلاع

١) مثلث متساوي الاضلاع،

فيه جميع الاضلاع متساوية، وتكون جميع زواياه متساوية، كل زاوية ٦٠ درجة.

مثال:

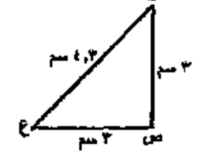


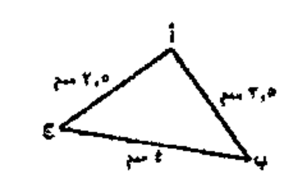


٢) مثلث متساوي الساقين،

حيث يكون في المثلث ضلعين متساويين، وتكون فيه زوايا القاعدة متساوية.

مثال:





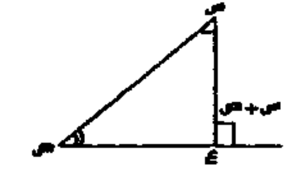
٣) مثلث مختلف الاضلاع. تكون أضلاعه مختلفة في الطول.

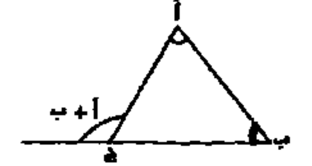
الزاوية الخارجية للمثلث

الزاوية الخارجية للمثلث وهي الزاوية المحصورة بين امتداد احد اضلاع المثلث والضلع الاصلي.



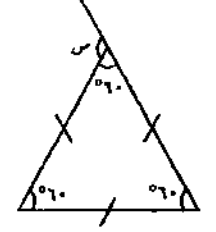
نظرية: مجموع قياس الزاويتين الداخلتين في أي مثلث يساوي قياس الزاوية المجاورة للزاوية الثالثة.





* سؤال:

في الشكل المجاور جد الزاوية ∢ س



الحل:

∢ س = ١٨٠°-٦٠°=١٢٠°

(لأنها مستقيمة أو متكاملة مع زاوية المثلث متساوي الأضلاع)

من خصائص المثلثات:

(١) مجموع زوايا أي مثلث تساوي ١٨٠.

تحقق: ارسم أي مثلث ثم استخدم المنقلة في إيجاد مجموع الزوايا.

(٢) يكون مجموع طولا أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

تحقق: ارسم أي مثلث ثم خد أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة واجمع أي ضلعين ستجد أن مجموع الضلعين أكبر من الضلع الثالث.

مثال: اي القياسات التالية تمثل أضلاع مثلث

١. ٤، ٦، ١٢ ⟸ لا يجوز أن يشكّل مثلث لأن ٤+٦=١٠ وهي أقل من الضلع الثالث (١٢)

٢. ٢. ٥، ٦، ٧ ⟸ نعم يجوز أن يشكّل مثلث لأن مجموع ضلعين ٥+٦=١١ وهي أكبر من الضلع الثالث (٧)

٣. ٣. ٩، ٩، ٩ ⟸ نعم يجوز أن يشكّل مثلث لأن مجموع أي ضلعين ٩+٩=١٨ وهي أكبر من الضلع الثالث (٩)

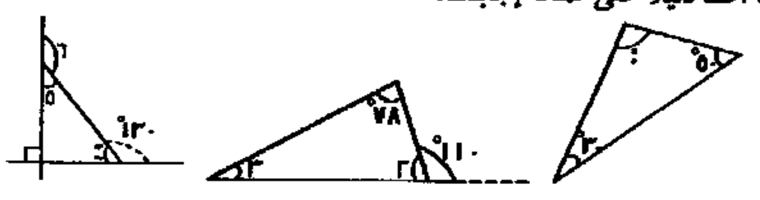
(٣) يكون الضلع الأكبر في أي مثلث يقابل الزاوية الكبرى في نفس المثلث، والعكس صحيح أيضاً.

تحقق:

ارسم أي مثلث ثم استخدم المسطرة والمنقلة في إيجاد أطول الأضلاع وقياسات الزوايا. ستجد أن أطول ضلع يقابل أكبر زاوية. وأصغر ضلع يقابل أصغر زاوية.

تدريب:

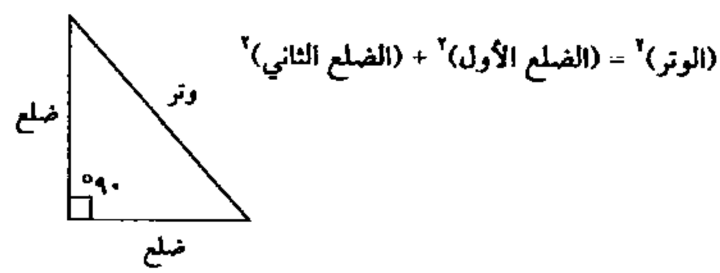
أعطيت الزوايا في الأشكال التالية الأرقام من ١-٦. أوجد قيمة كل زاوية منها أعط دليلاً على صحة إجابتك.



نظرية فيثاغورس:

في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

(الوتر)^{2} = (الضلع الأول)^{2} + (الضلع الثاني)^{2}



مثال: في الشكل المجاور جد ضلع أ ب

(الوتر)^{2} = (الضلع الأول)^{2} + (الضلع الثاني)^{2}

(١٠)^{2} = (٨)^{2} + (أ ب)^{2}

١٠٠ = ٦٤ + (أ ب)^{2}

١٠٠ − ٦٤ = (أب)^{2}

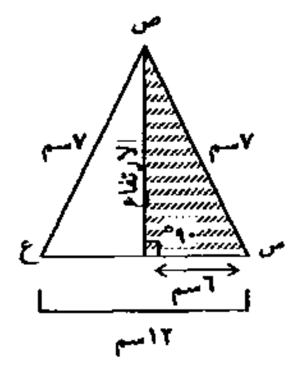
∴ (أ ب)^{2} = ٣٦

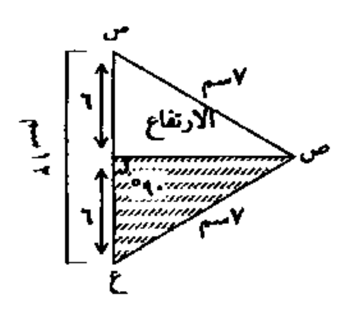
∴ أ ب = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

مثال: المثلث (س ص ع) فيه س ص = ص ع

حيث س ع = ١٢سم، س ص = ٧سم

* جد ارتفاع المثلث؟





(الوتر)^{2} = (الضلع الأول)^{2} + (الضلع الثاني)^{2}

(٧)^{2} = (٦)^{2} + (ص و)^{2}

٤٩ = ٣٦ + (ص و)^{2}

٤٩ - ٣٦ = (ص و)^{2}

١٣ = (ص و)^{2}

(ص و)^{2} = ١٣

ص و = $\sqrt{13}$

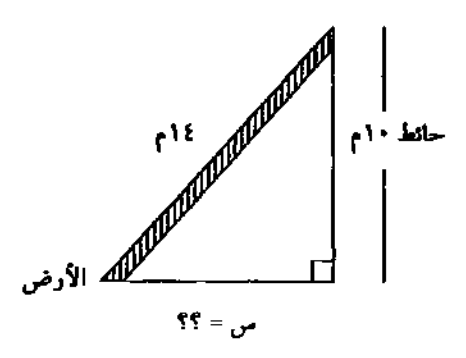
تذكر: إذا كان العمود النازل من رأس المثلث إلى القاعدة المقابلة ينصف هذه القاعدة فإن المثلث متساوي الساقين

* **سؤال:**

سلم طولهُ ١٤م، مستند على حائط عامودي بحيث يكون البعد بين أعلى السلم وأسفل الحائط يساوي (١٠)م

المطلوب:

جد المسافة بين أسفل السلم وأسفل الحائط



(الوتر)^2 = (الضلع الأول)^2 + (الضلع الثاني)^2

(١٤)^2 = (١٠)^2 + (س)^2

١٩٦ = ١٠٠ + (س)^2

١٩٦ − ١٠٠ = (س)^2

$\sqrt{٩٦}$ = $\sqrt{(س)^2}$

س = ٤ $\sqrt{٦}$

* سؤال:

أي القياسات التالية يمكن أن تشكل مثلث قائم الزاوية.

١) ٣، ٤، ٥

الحل:

نطبق فيثاغورس:

$(٥)^{٢} = (٣)^{٢} = (٤)^{٢}$

$٢٥ = ٩ + ١٦$

$٢٥ = ٢٥$

∴ نعم هو مثلث قائم الزاوية

٢) ٤، ٦، ٨

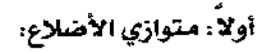
نجرب:

$(٨)^{٢} = (٤)^{٢} + (٦)^{٢}$

$٦٤ = ١٦ + ٣٦$

$٦٤ \neq ٥٢$

∴ ليس مثلث قائم الزاوية



سوف نتعرف معاً على بعض الأشكال الرباعية وخصائصها

أولاً: متوازي الأضلاع:



هو شكل رباعي (أي يتكون من أربعة أضلاع وأربع زوايا) كما في الشكل المجاور.

خصائصه: (من خصائص متوازي الأضلاع):

١. كل ضلعين متقابلين متوازيين (ومن هنا أتى اسمه متوازي الأضلاع) ومتساويين.

أ ب / / د ج ويساويه، وكذلك أ د / / ب ج ويساويه.

٢. كل زاويتين متقابلتين متساويتين

∠ب = ∠د ، ∠أ = ∠ج.

٣. قطرا متوازي الأضلاع كل منهما ينصف الآخر ولا يكونان متساويان في الطول (لماذا)؟؟

٤. مجموع زوايا متوازي الأضلاع (٣٦٠) لأنه شكل رباعي.

★ سؤال: ما الشكل الناتج عن متوازي الأضلاع السابق إذا تساوى طولا قطريه؟

ثانياً: المستطيل:



هو متوازي أضلاع تساوى فيه طول القطرين.

اكتب تعريفاً آخر للمستطيل.

خصائصه:

نفس خصائص متوازي الأضلاع ولكن قطريه متساويان في الطول.

ثالثاً: المربع:

هو مستطيل تساوت أطوال أضلاعه.

اكتب تعريفاً آخر للمربع.

خصائص المربع:

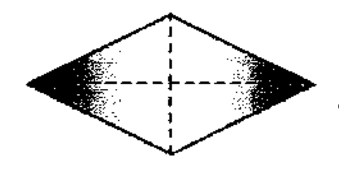
نفس خصائص المستطيل ولكن تساوت اطوال أضلاعه

حيث أ ب = ب ج = ج د = دأ

ملاحظات تخص المستطيل والمربع:

١. زوايا المستطيل والمربع كل منهما تساوي ٩٠ (قائمة).
٢. قطرا المستطيل متساويان وكذلك قطرا المربع متساويان أيضاً.
٣. قطرا المستطيل غير متعامدين وقطرا المربع متعامدان.
٤. قطرا المربع ينصفان زواياه أما قطرا المستطيل فلا ينصفان زواياه.

رابعاً: المعيَّن:

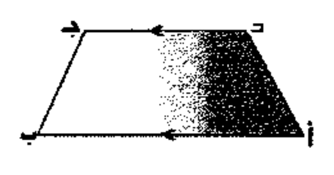


هو متوازي الأضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان.

خصائص المعيَّن:

نفس خصائص المربع ولكن أقطاره غير متساوية.

خامساً: شبه المنحرف:

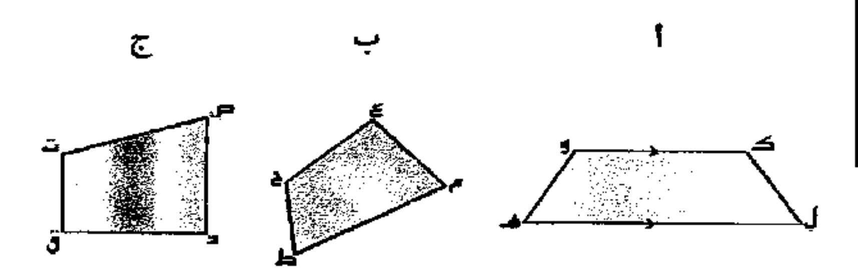


هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان ويطلق عليهما علماء الرياضيات لفظ قاعدتين.

أ ب // دجـ بينما أ د لا يوازي ب جـ

يسمى أ ب قاعدة شبه المنحرف وكذلك دجـ هي القاعدة الثانية لشبه المنحرف.

تدريبات: أي من الأشكال التالية يمثل شبه منحرف؟



- الشكل (أ): يمثل شبه منحرف لأن هناك ضلعين متوازين فيه هما ل هـ// أ د.
- الشكل (ب): لا يمثل شبه منحرف لأنه لا يوجد فيه ضلعان متوازيان.
- الشكل (ج): يمثل شبه منحرف لأن دص// ق ت.

تدريب على الأشكال الرباعية: (www.schoolarabia.net)

أكمل الفراغات في العبارات التالية مستعملاً واحداً من أسماء الأشكال الرباعية الواردة في الشجرة.

١. متوازي الأضلاع هو .... قطراه ينصف كل منهما الآخر.

٢. المستطيل هو .... قطراه متساويان.

٣. متوازي الأضلاع الذي إحدى زواياه قائمة هو ....

٤. المعيَّن: هو .... قطراه متعامدان.

٥. مجموع زوايا أي ....= ٤ قوائم.

٦. شبه المنحرف هو .... فيه ضلعان فقط متوازيان.

٧. المربع هو .... إحدى زواياه قائمة.

٨. شكل رباعي أضلاعه الأربعة متساوية وإحدى زواياه = ٧٥ فهو............

٩. المستطيل والمعين والمربع تنتمي جميعاً لعائلة ....

١٠. قطرا المعين وكذلك قطرا .... ينصفان زواياه.

١١. قطر .... يقسمه إلى مثلثين متطابقين كل واحد منهما قائم الزاوية متساوي الساقين.

١٢. قطرا .... متعامدان ولكنهما غير متساويين.

١٣. قطرا .... متعامدان ومتساويان.

١٤. قطرا .... متساويان وغير متعامدين.

١٥. قطرا .... غير متساويين وغير متعامدين.

١٦. نسمي .... متساوي الساقين إذا تساوى ضلعاه غير المتوازيين.

١٧. المربع يشبه .... في كون الزوايا الأربع في كل منهما قوائم.

١٨. المعيَّن يشبه .... في أن كلاً منهما يحوي زاويتين حادتين وأخريين منفرجين.

١٩. قطرا .... يقسمانه إلى أربع مثلثات قائمة الزاوية متطابقة ولكنها ليست من النوع المتساوي الساقين.

٢٠. المستطيل هو .... فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين وإحدى زواياه قائمة.

مثال: اي الجمل التالية صحيحة:

١. أي مربع هو مستطيل: صحيحة

٢. أي مستطيل هو مربع: خطأ (لأن الأضلاع المتقابلة متساوية) ومتوازية

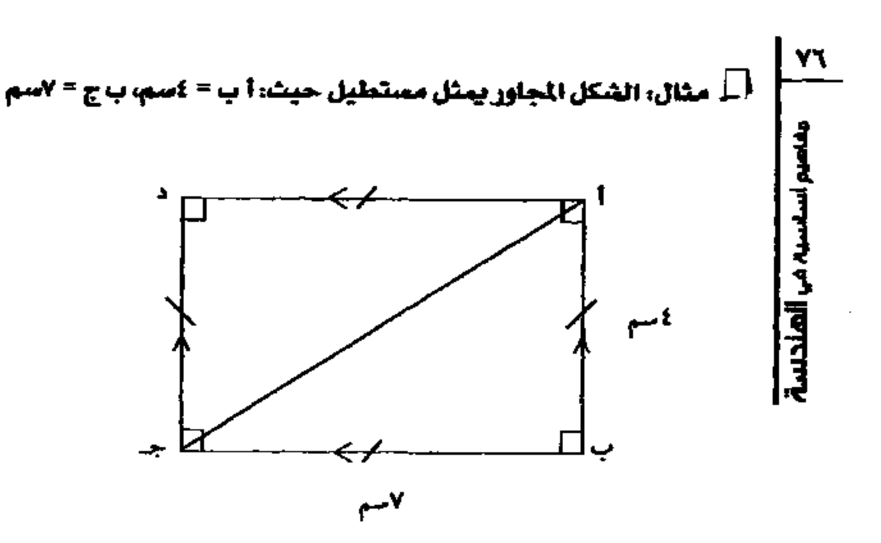
٣. أي مربع هو معين: صحيحة

٤. أي معين هو مربع: خطأ (لأن المعين ليس زواياه قائمة)

٥. أي متوازي الأضلاع هو مستطيل: خطأ لأن متوازي الأضلاع ليس شرط أن تكون زواياه قائمة والمستطيل زواياه قائمة

٦. أي مستطيل هو متوازي الأضلاع: صحيحة

مثال: الشكل المجاور يمثل مستطيل حيث: أ ب = ٤سم، ب ج = ٧سم



المطلوب:

جد طول القطر أ جـ؟

الحل:

حسب نظرية فيثاغورس

(الوتر)^2 = (الضلع الأول)^2 + (الضلع الثاني)^2

(أ ج)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

(أ ج)^2 = (٤)^2 + (٧)^2

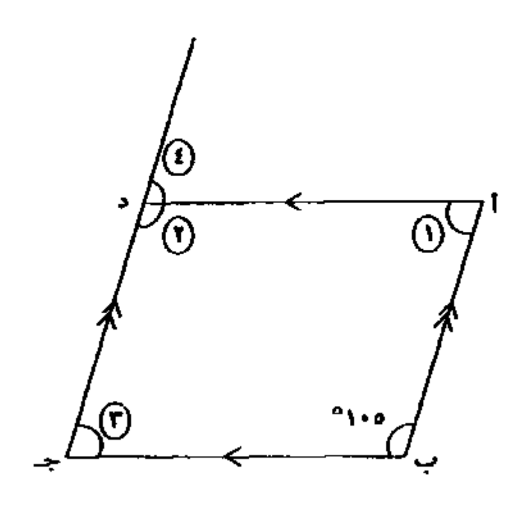
(أ ج)^2 = ١٦ + ٤٩

(أ ج)^2 = ٦٥

∴ أ ج = $\sqrt{٦٥}$ = ٨,٠٦

* سؤال:

الشكل أ ب جـ د يمثل متوازي أضلاع، جد الزوايا المرقمة



∢ ١ = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

بسبب التحالف مع الزاوية المعطاة

∢ ٢ = ١٨٠° − ٧٥° = ١٠٥° بسبب التحالف مع ∢ ١

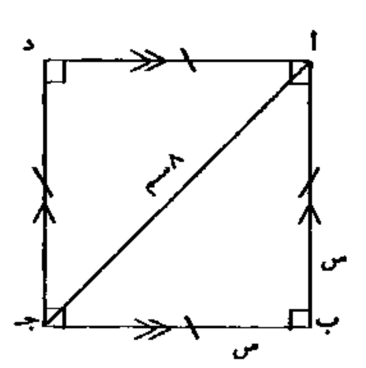
∢ ٣ = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥° بسبب التحالف مع ∢ ٢

∢ ٤ = ٧٥° بسبب التناظر مع ∢ ٣

∢ ٤ = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥° بسبب زاوية مستقيمة مع ∢ ٢

★ سؤال:

الشكل التالي يمثل مربع أ ب جـ د، فيه القطر أ ج يساوي ٨سم، جد طول ضلع المربع؟



الحل: (حسب نظرية فيثاغورس)

(الوتر)^{٢} = (الضلع الأول)^{٢} + (الضلع الثاني)^{٢}

(٨)^{٢} = (س)^{٢} + (س)^{٢}

$\frac{٦٤}{٢} = \frac{٢}{٢}$ س^{٢}

٣٢ = س^{٢}

س = $\sqrt{٣٢}$ = ٥,٥٦

* **سؤال:**

إذا كان قياس زاوية = $\frac{٣}{٧}$ مكملتها، جد قياس تلك الزاوية:

الحل:

$\measuredangle$ س = $\frac{٣}{٧}$ × (١٨٠ – س)

٧×س = ٧ × $\frac{٣}{٧}$ × (١٨٠ – س)

٧ س = ٣ × (١٨٠ – س)

٧ س = ٥٤٠ – ٣ س

٧ س + ٣ س = ٥٤٠°

$\frac{١٠}{١٠}$ س = $\frac{٥٤٠°}{١٠}$

س = ٥٤°

* **سؤال:**

إذا كان قياس زاوية يساوي ($\frac{٧}{٢٠}$) متممتها، جد قياس تلك الزاوية؟

الحل:

$\measuredangle$ س = $\frac{٧}{٢٠}$ × (٩٠° – س)

٢٠ س = ٧ × (٩٠° – س)

٢٠ س = ٦٣٠ – ٧ س

٢٠ س + ٧ س = ٦٣٠

$\frac{٢٧}{٢٧}$ س = $\frac{٦٣٠}{٢٧}$

س = ٢٣,٣°

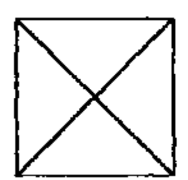
ملاحظة:

لمعرفة عدد الأقطار في المضلع الذي فيه (ن) ضلع

نستخدم هذا القانون $\frac{\text{ن} \times (\text{ن} - ٣)}{٢}$

*** سؤال:**

كم قطر في الشكل الرباعي

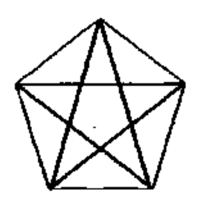


$$\frac{٤ \times (٤ - ٣)}{٢}$$

$$\frac{٤ \times ١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢ \text{ قطرين}$$

*** سؤال:**

كم قطر في الشكل الخماسي



$$\frac{٥ \times (٥ - ٣)}{٢}$$

$$\frac{٥ \times ٢}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥ \text{ أقطار}$$

★ سؤال: كم قطر في الشكل السداسي

$$\frac{٦\times(٦-٣)}{٢}$$

$$\frac{٦\times٣}{٢}=\frac{١٨}{٢}=٩\ \text{أقطار}$$

★ سؤال: كم قطر في الشكل السباعي:

$$\text{عدد أقطار المضلع ٧}=\frac{ن\times(ن-٣)}{٢}$$

$$=\frac{٧\times(٧-٣)}{٢}=\frac{٧\times٤}{٢}=\frac{٢٨}{٢}=١٤\ \text{قطر}$$

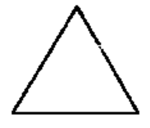
★ سؤال: كم عدد الأقطار في الشكل الثماني

$$\text{عدد أقطار الشكل الثماني}=\frac{ن\times(ن-٣)}{٢}$$

$$=\frac{٨\times(٨-٣)}{٢}=\frac{٨\times٥}{٢}=\frac{٤٠}{٢٠}=٢٠\ \text{قطر}$$



★سؤال: كم عدد اقطار المثلث؟



لا يوجد فيه أقطار

★ سؤال: كم عدد أقطار الشكل شبه منحرف (هو شكل رباعي)

عدد أقطار الشكل شبه المنحرف الذي عدد أضلاعهُ ٤

$$=\frac{٤\times(٤-٣)}{٢}=\frac{٤\times١}{٢}=\frac{٤}{٢}=٢\ \text{قطرين}$$

(٢ - ٨) ملخص تعريفات وقوانين الوحدة الثانية

* الهندسة: هي أحد فروع علم الرياضيات التي تتناول الأشكال الهندسية والمجسمات والمساحات والحجوم
* الهندسة الأقليدية: هي مسلمات ونظريات
* الهندسة التحليلة: هي التي تتناول
  ١. معادلة الخط المستقيم
  ٢. الميل
  ٣. المسافة بين نقطتين
* الهندسة التحويلية: هي
  ١. الانعكاس
  ٢. التماثل
  ٣. الدوران
  ٤. التطابق والتشابه
  ٥. القياس

* مفاهيم غير معرفة: هي المستوى والنقطة والمستقيم

* النقطة: هي الوحدة الأساسية في الهندسة والتي تمثل موقعاً في الفراغ وليس له أبعاد ويرمز لها بحرف واحد مثل × أ

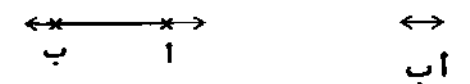
* المستقيم: يرمز لهُ بحرفين عليه أو بحرف واحد على طرفهُ

$\overleftrightarrow{ل}$ $\overleftrightarrow{أب}$ أ ب ل (ل ↔×———×↔ مع النقطتين أ، ب)

* المستوى: هو أي سطح مستوٍ يرمز له بثلاثة أحرف غير مستقيمة تقع فيه أو بحرف يقع على إحدى زواياه

أنواع المستقيمات؟

١. الخط المستقيم: وهو خط ليس لهُ بداية وليس لهُ نهاية



٢. القطعة المستقيمة: هي خط لهُ بداية ولهُ نهاية



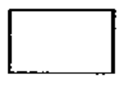
٣. المستوى: هو عبارة عن أي سطح مستوٍ – يرمز لهُ بثلاثة نقاط أو حرف تقع عليه أو باستخدام حرف يقع على إحدى زواياه

حالات المستقيمات؟

١. مستقيمان متقاطعين: هما مستقيمان يشتركان في نفس النقطة .



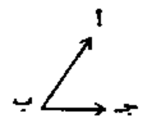
٢. مستقيمان متوازين: هما مستقيمان لا يشتركان بأي نقطة ويقعان بنفس المستوى .



٣. مستقيمان متعامدان: هما مستقيمان يشتركان بنفس النقطة ويصنفان زاوية قائمة تساوي ٩٠°.

٤. مستقيمان متخالفان: وهما مستقيمان لا يشتركان بأي نقطة ولا يقعان على نفس المستوى.

* الزاوية: هي تقاطع شعاعين في نقطة واحدة تسمى رأس الزاوية وكل شعاع ضلع لزاوية. ويرمز لزاوية بثلاثة أحرف أ ب جـ أو بحرف على رأس الزاوية س.



* زاويتين متطابقتين: يعنى زاويتين متساويتين في القياس.
* الزاوية الحادة: هي الزاوية التي يكون قياسها أكبر من صفر° وأقل من ٩٠°.
* الزاوية القائمة: هي الزاوية التي يكون قياسها ٩٠°.

* الزاوية المنفرجة: هي الزاوية التي يكون قياسها أكبر من ٩٠° وأقل من ١٨٠°.
* الزاوية المستقيمة: هي الزاوية التي يكون قياسها ١٨٠°.
* الزاوية المنعكسة: هي الزاوية التي تكون قياسها أكبر من ١٨٠° وأقل من ٣٦٠°.
* الزوايا المتتامة: هما الزاويتان المتجاورتان التي يكون مجموع قياسهما (٩٠°).
* الزوايا المتكاملة: هما الزاويتان المتجاورتان التي يكون مجموع قياسهما ١٨٠° .
* الزوايا المتجاورة: هما زاويتان متجاورتان إذا كان لها رأس مشترك وضلعين آخرين يقعان في جهتين مختلفتين من الضلع المشترك.
* الزوايا المتقابلة بالرأس: وهما زاويتان متساويتان في القياس ناتجتان من تقاطع مستقيمين (٤ زوايا غير مستقيمة).
* الزوايا المتناظرة: هما زاويتان متساويتان في القياس غير متجاورتان واقعتان على جهة واحدة أي نفس الخط إذا كانت إحداهما داخلية والأخرى الخارجية أو العكس ويشترط وجود مستقيمين متوازين وهي ٨ زاويا.
* الزوايا المتبادلة: وهما زاويتان متساويتان غير متجاورتان ناتجة عن تقاطع مستقيم مستقيمين متوازين واقعتين في جهتين مختلفين في نهاية القاطع.
* الزوايا المتحالفة: هما زاويتان غير متساويتان داخليتان مجموع قياسهما يساوي ١٨٠° إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازين تقعان في جهة واحدة من القاطع.
* المضلع المنتظم: هو المضلع الذي تتساوى فيه جميع قياسات الزواياه وأطوال اضلاعهُ متساوية.

* لمعرفة مجموع زوايا المضلع = (ن – ٢) × ١٨٠

* لمعرفة زاوية في المضلع المنتظم = $\frac{(ن - ٢) × ١٨٠}{ن}$

* لمعرفة عدد الأقطار في المضلعات $\frac{ن × (ن - ٣)}{٢}$

* المضلع: هي الأشكال الهندسية مكونة من أضلاع يجب أن تكون مغلقة أي تبدأ وتنتهي بنفس النقطة.
* المضلع الثلاثي: هو شكل هندسي لهُ ثلاثة أضلاع وثلاثة زواياه.

المثلثات حسب الأضلاع:

١. مثلث متساوي الأضلاع: هـو المثلـث الـتي تكـون جميـع أضـلاعهُ وزوايـا متساوية وتساوي = ٦٠°.
٢. مثلث متساوي ساقين: هو المثلث الذي يكون فيه ضلعين متساوين وزاويتا القاعدة فيه متساويتين.

◆ حسب الزوايا:

١. مثلث حاد الزاوية: هو المثلث الذي يكون فيه أحـد الزوايـا فيـه حـادة أي اكبر من صفر وأقل من ٩٠°.
٢. مثلث منفرج الزاوية: هو المثلث الذي يكون فيه أحـد زوايـاه منفرجـة أي اكبر من ٩٠° وأقل من ١٨٠°.
٣. مثلث قائم الزاوية: وهو المثلث الـذي يكـون فيـه أحـد الزوايـا قائمـة أي قياسها ٩٠°.

* المضلعات الرباعية: هي الأشكال الهندسية التي يكون فيها أربعة أضلاع وأربعة زوايا.

* المربع مستطيل، معين: هو شكل هندسي:
١. جميع أضلاعهُ متساوية.
٢. الأضلاع المتقابلة متوازية.
٣. جميع زواياه قوائم = ٩٠°.

* المستطيل متوازي الأضلاع: هو شكل هندسي.
١. جميع الأضلاع المتقابلة متوازية ومتساوية.
٢. وجميع الزوايا فيه قوائم تساوي ٩٠°.

* شبه منحرف: هو شكل هندسي فيه ضلعين.
١. متقابلين.
٢. متوازين فقط.

* المعين متوازي مستطيلات: هو شكل هندسي جميع.
١. الأضلاع متساوية.
٢. والأضلاع المتقابلة متوازية ولكن ليس ضروري أن تكون زواياه قوائم.

* متوازي الأضلاع: هو شكل هندسي جميع الأضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية ولكن ليس ضروري أن تكون زواياهُ قوائم = ٩٠°.

أسئلة مراجعة للوحدة الثانية

١. أي من المسميات الأولية يمكن ان تعبر عما يلي:

أ. ذرة من رمل ⟵ نقطة

ب. حافة ورقة ⟵ مستقيم

حافة باب

جـ. جدران غرفة ⟵ مستويات

د. نجم في السماء ⟵ نقطة

هـ. ملعب كرة سلة ⟵ نقطة

٢.

١. اذكر اسم آخر للمستوى (ص)

ب جـ د

٢. اذكر اسم آخر للمستقيم (م)

$\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

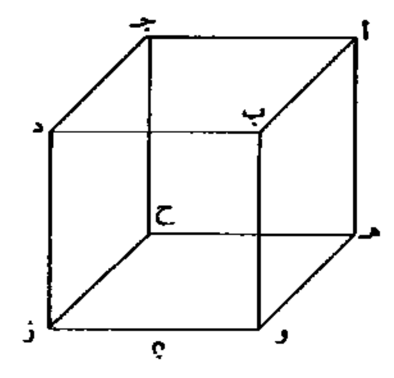
٣. سم نقطة تقع على المستوى (س)

٤. سم نقطة لا تقع على المستوى (س)

٥. سم شعاعين على المستقيم (م)

٦. سم قطعة مستقيمة تقع على المستقيم ($\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$)

٣. الشكل المجاور يمثل غرفة صفية أعطِ مثالا



١. ثلاثة نقاط مستقيمة

↔
و ن ز

٢. ثلاثة نقاط مستوية

أ هـ و

٣. خمس نقاط مستوية

و، ؟، ز، د، ب

٤. مستقيمين متوازين

أ ب // هـ و

جـ د // د ز

٥. مستقيمين متعامدين

أ هـ ⊥ هـ و

أ ب ⊥ ب و

أ ب ⊥ أ هـ

٦. مستقيمين متخالفين

أ هـ ح ز

جـ ح و ز

٧. مستقيمين يوازين المستقيم أ ب

↔ ↔
أب // هـ و

↔ ↔
أب // جـ د

٨. مستقيمين متعامدا ب المستقيم أ هـ

أ هـ ⊥ هـ و

أ هـ ⊥ أ ب

٩. مستقيمين يخالفان المستقيم ب د

أ هـ يخالف ب د

جـ ح يخالف ب د

٤. هل العبارات التالية صحيحة ولماذا؟

١. إذا لم يتقاطع مستقيمان مهما امتدا فإنهما يكونان متوازين.

خاطئة:

لأن المستقيمان المتخالفان لا يتقاطعا مهما امتدا وهما غير متوازين لأن الشرط في التوازي هو (لا يوجد نقاط مشتركة وأن يحويهما مستوى واحد).

٢. إذا لم يقع مستقيمان في مستوى واحد فلا يمكن أن يتقاطعا.

صحيحة.

٣. إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد فإنهما يتقاطعان.

خطأ

لأنهما مستقيمان متوازين (لا يشتركان في نفس النقطة ويقعان في نفس المستوى)

٤. إذا لم يتقاطع مستقيمان مهما امتدا فإنهما يقعان في مستوى واحد

خطأ لأن المستقيمان المتخالفة لا تشترك بنفس النقطة ولا تقع في نفس المستوى (لا يتقاطع مهما امتدت) وهما يقعان في مستوين مختلفين.

٥. حدد نوع الزوايا

٤٥° = زاوية حادة

٩٠° = زاوية قائمة

١٣٥ = زاوية منفرجة

٣١٥° = زاوية منعكسة

٢٢٥ = زاوية منعكسة

٣٦٠ = زاوية منعكسة

.٦

∡أ = ٤٥″ ٥٦′ ٧٣°

∡ب = ٣٧″ ٤٢′ ١٤°

∡جـ = ٥٦″ ٣٨′ ٣٩°

أوجد ناتج ما يلي ١) ∡أ + ∡جـ

١) ∡أ = ٤٥″ ٥٦′ ٧٣°

+

∡جـ = ٥٦″ ٣٨′ ٣٩°

١٠١″ (٩٤′+١′) ١١٢

٤١″ ٦٠″ = ١′

٩٥′

٣٥ ٦٠′ = ١°

٤١″ ٣٥′ ١١٣°

٢) ∡ب − ∡جـ

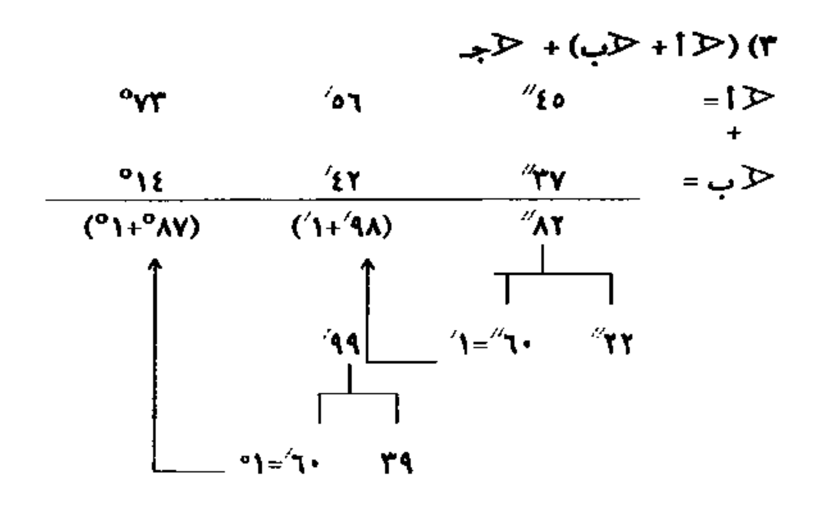
٩٨° ٤٨°

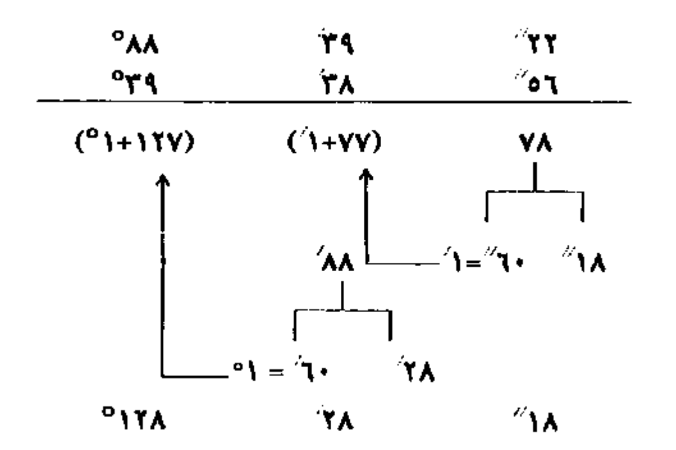
∡جـ = ٥٦″ (٨٣′+٦٠′)= ٤٩°

١°

∡ب ٣٧″ ٤٢′ ١٤°

−١٩″ ٥٦′ ٢٤°

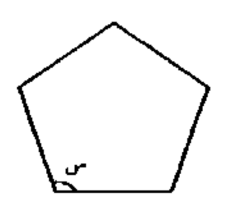




٧. جد قياس زاوية في السداسي المنتظم

$$\text{∠س} = \frac{\text{مجموع الزوايا السداسي}}{٦} = \frac{٧٢٠}{٦} = ١٢٠°$$

٨. في الشكل المجاور جد ∢ س



خماسي منتظم

مجموع الزوايا الداخلية الذي عدد أضلاعهُ ٥ =

(ن − ٢) × ١٨٠ = (٥−٢) × ١٨٠ =

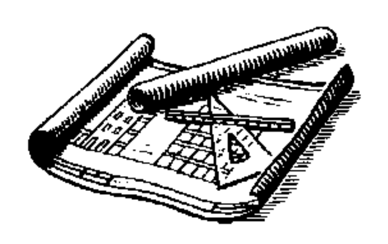
$$\therefore \text{∢ س} = \frac{\text{مجموع زوايا الخماسي}}{٥}$$

$$= \frac{١٨٠\times٣}{٥} = \frac{٥٤٠}{٥} = ١٠٨°$$

كل زاوية = ١٠٨°

الوحدة الثالثة

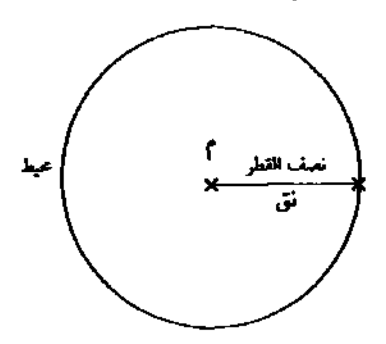
الدائرة والتطابق والتشابه



الوحدة الثالثة
الدائرة والتطابق والتشابه

(٣-١) الدائرة:

هي المحل الهندسي لنقطة متحركة و(س، ص) التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة (تسمى المركز) يساوي مقدار ثابت (نصف القطر).



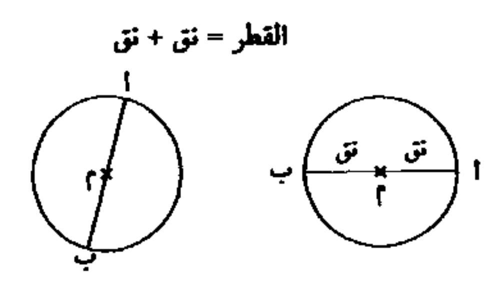
◆ **عناصر الدائرة:**

١. المركز: هو نقطة في منتصف الدائرة.

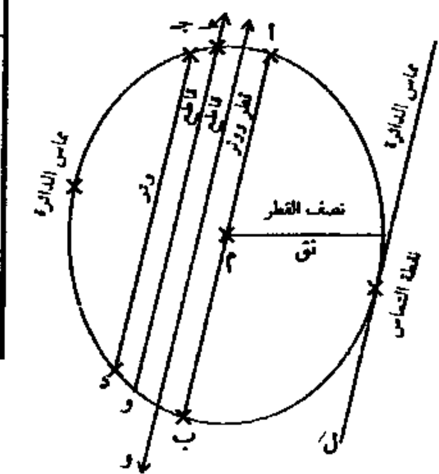
٢. نصف القطر: هو المسافة بين مركز الدائرة والمحيط (هو خط مرسوم من المركز للمحيط).

٣. القطر: هو خط مستقيم يمر بالمركز ونهايتهُ على المحيط مثل (أ ب) ويرمز لهُ بـ ق (وهو أي وتر مار بالمركز).

القطر = نق + نق



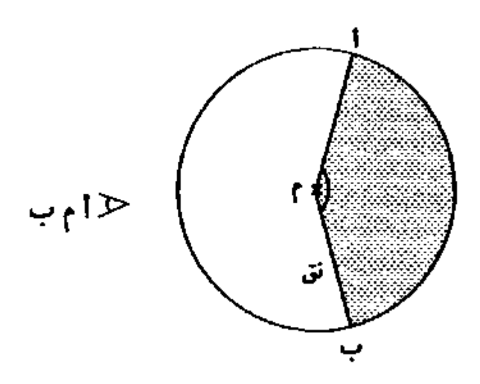
٤. الوتر: وهو أي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة. هو خط نهايته على المحيط وليس من الضروري أن يمر بالمركز مثل ج د .
القطر هو وتر ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة لأن الوتر لا يمر بالمركز.



٥. القاطع: هو خط يمر بمحيط الدائرة، مثل: هـ و وهو أي مستقيم يحوي وتراً في الدائرة.

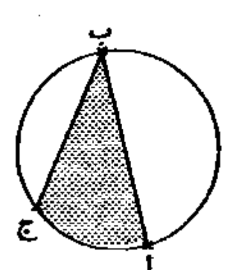
٦. مماس الدائرة: هو خط يتقاطع مع دائرة في نقطة واحدة، مثل(لَ).
هو مستقيم يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة تسمى (نقطة التماس).

٧. الزاوية المركزية للدائرة: هي الزاوية يكون رأسها على مركز الدائرة وأضلاعها أنصاف أقطار.

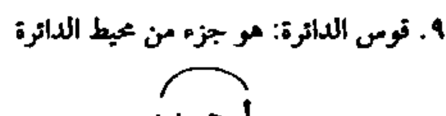


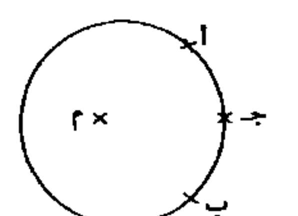
٨. الزاوية المحيطية: هي زاوية يكون رأسها على محيط الدائرة

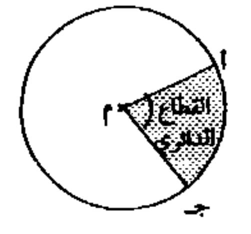
∢ أ ب ج



٩. قوس الدائرة: هو جزء من محيط الدائرة

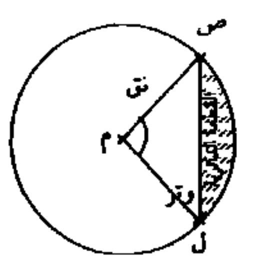






١٠. القطاع الدائري: جزء من الدائرة ورأسه المركز مثلاً: (أ م جـ).

هو الجزء من الدائرة محصور بين نصفي الأقطار ورأسها المركز.



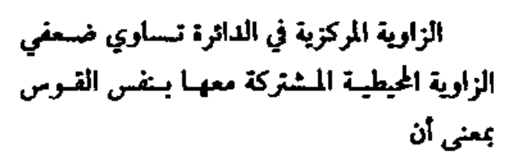
١١. القطعة الدائرية: هي المساحة المحصورة بين وتر الدائرة وقوس ذلك الوتر. والقطعة الدائرية هي جزء من القطاع الدائري.

(٣-٢) الزوايا المركزية والمحيطية

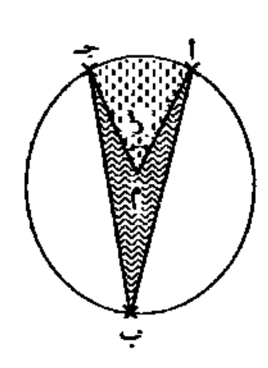
◆ **نظرية في الدائرة:**

الزاوية المركزية في الدائرة تساوي ضعفي الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس بمعنى أن

∢ أ م ب = ٢ × ∢ أ جـ ب



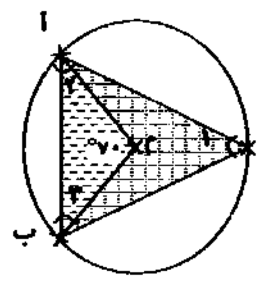
مثال: في الشكل المجاور ∢ أ ب جـ = ٤٠ جد ∢ س؟



∢ س = ٤٠ × ٢٠ = ٨٠

لأن الزاوية المركزية مشتركة مع الزاوية المحيطية بنفس القوس والزاوية المركزية = الزاوية المحيطية × ٢.

مثال: جد الزوايا المرقمة ∢ ١ و ∢ ٢ و ∢ ٣ في الشكل المجاور؟



الحل:

∢ ١ = °٣٥ بسبب أنها محيطية مشتركة مع الزاوية المركزية بنفس القوس.

$$∢٢ = ∢٣ = \frac{١٨٠ - ٧٠}{٢} = \frac{١١٠}{٢} = °٥٥$$

لأن المثلث المتساوي الساقين يكون فيه ضلعين متساوين ويكون فيه زاويتان القاعدة متساويتين.

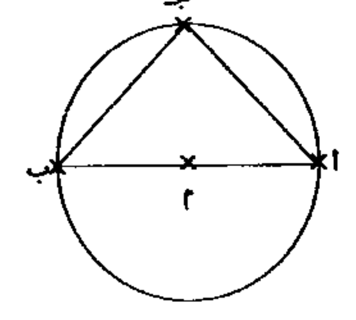
مثال:

في الشكل المجاور جد ∢ س؟

الحل:

∢ س = ٩٠° لأنهـا محيطيـة تقابـل المركزية.

*** نظرية: الزاوية المحيطية المرسومة على القطر أو على نصف الدائرة = ٩٠°**

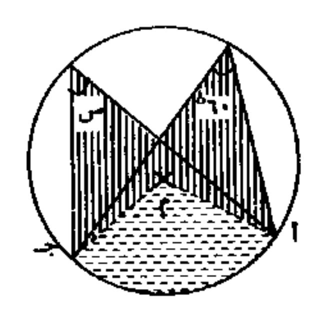


البرهان:

∢ أ م ب = ١٨٠° بسبب أنهـا زاوية مستقيمة

∢ أ ج ب = ٩٠° بسبب أنهـا محيطية تشترك مع المركزية بنفس القوس.

مثال: في الشكل المجاور جد ∢ س؟

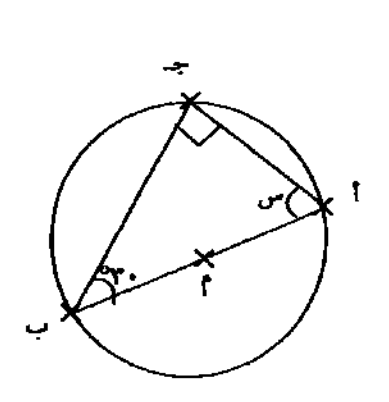


∢ أ م جـ = ١٢٠° بسبب أنهـا زاويـة مركزية تشترك مع المحيطية بالقوس نفسه وهي ضعفي الزاوية المحيطية ٦٠ × ٢ = ١٢٠°

∢ س = $\frac{١٢٠°}{٢}$

∴ ∢ س = ٦٠° لأنها زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية بنفس القوس.

* سؤال: جد ∢ س و ∢ أ جـ ب

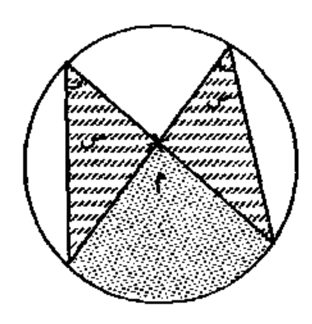


الحل:

∢ أ جـ ب = ٩٠ لأن الزاوية المحيطية مرسومة على قطر الدائرة أو نصف الدائرة

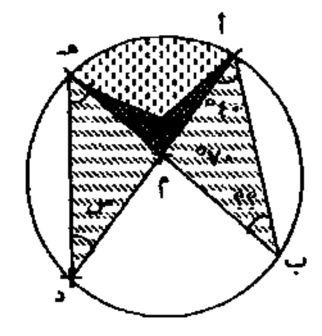
∢ س = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠)

∢ س = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠° لأن مجموع زوايا الداخلية للمثلث = ١٨٠°



* نتيجـة: الزوايـا المحيطيـة المشتركة بنفس القوس متساوية

* سؤال: في الشكل المجاور جد الزاوية ∢ س، ∢ أ ب م



الحل:

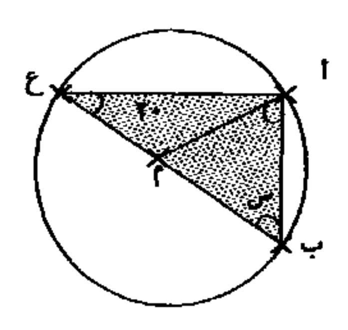
١. ∢ أ ب م = ١٨٠ − (٤٠ + ٧٠)

١٨٠ − ١١٠ = ٧٠

لأن مجموع زوايا المثلث ١٨٠

٢. ∢ س = ٧٠ لأن الزاوية المحيطية تشترك بنفس القوس مع ∢ أ ب هـ

*** سؤال:**



جـد الزاويـة ∢س في الـشكل المجاور؟

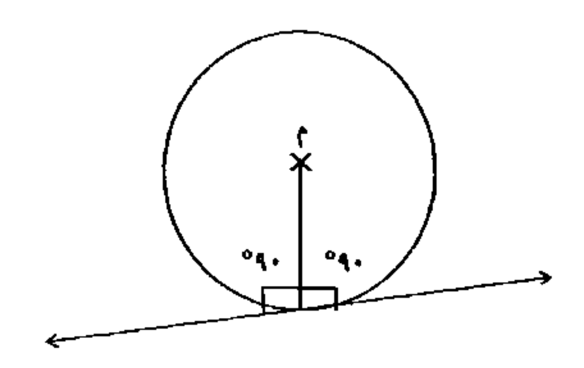
∢أ م ب = ٤٠°

لأنها زاويـة مركزيـة تـشترك بـنفس القوس مع المحيطية المعطاه

$$∢س = \frac{١٨٠ - ٤٠}{٢} = \frac{١٤٠}{٢} = ٧٠°$$

لأن المثلث أ م ب متساوي ساقين به ضـلعين متـساويين وزاويتـا القاعـدة متساويتان

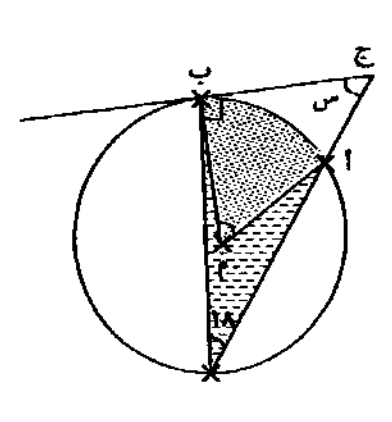
*** نظريـة: مـاس الـدائرة يكـون عمـودي علـى نـصف القطـر عنـد نقطة المماس**



* تذكر أن المثلث القائم الزاوية يمكن تطبيق نظرية فيثاغورس

$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع الأول})^2 + (\text{الضلع ٢})^2$

★ سؤال: في الشكل المجاور



جد ∢ أ م ب

∢ ج ب م

∢ س

❋ الحل:

١. ∢ أ م ب = ٣٦° بسبب أنها مركزية مشتركة مع المحيطية المغطاة بنفس القوس

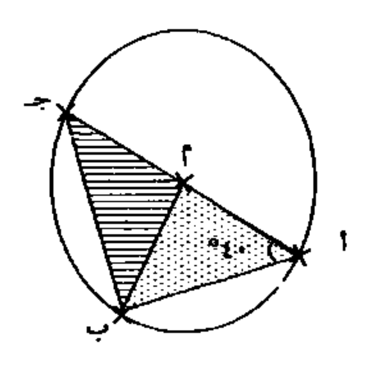
٢. ∢ أ ب م = ٩٠° لأن نق ⊥ المماس

٣. ∢ س = ١٨٠° – (٩٠° - ٣٦°) لأن مجموع زوايا المثلث تساوي ١٨٠°

∢ س = ١٨٠° - ١٢٦°

∢ س = ٥٤°

★ سؤال:



في الشكل المجاور

∢ ب أ م = ٤٠°

جد الزوايا التالية

∢ أ ب م، ∢ أ م ب، ∢ أ ج ب

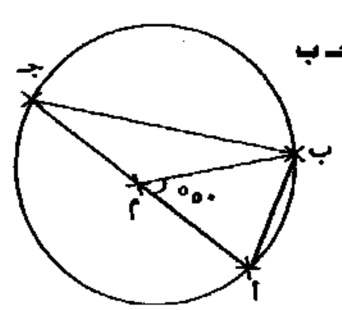
❋ الحل:

١. ∢ أ ب م = ٤٠° لأنهُ مثلث متساوي الساقين يكون فيه ضلعين متساوين ويكون فيه زاويتان القاعدة متساويتان

٢. ∢ أ م ب = ١٨٠ – (٤٠ + ٤٠) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠ لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

٣. ∢ أ جـ ب = ٥٠° لأنها محيطية تشترك مع المركزية بنفس القوس

* **سؤال: في الشكل المجاور جد: ∢ أ جـ ب**



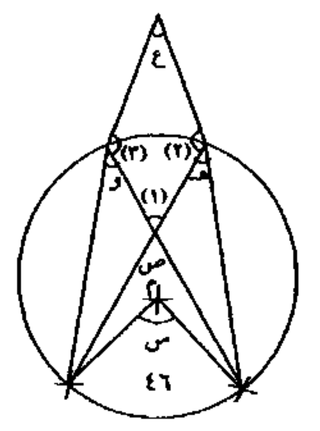
∢ أ جـ ب = المركزية / ٢

∢ أ جـ ب = ٥٠° / ٢

∢ أ جـ ب = ٢٥°

وذلك لأن الزاوية المحيطية تشترك مع الزاوية المركزية المعطاة بنفس القوس

* **سؤال:**



في الشكل المجاور

∢ س = ٤٦°

∢ ص = ٣٠°

جد ∢ هـ، ∢ و، ∢ع؟

* **الحل:**

١. ∢ هـ = ∢ و = ٢٣°

وذلك لأن الزاوية المحيطية مشتركة بنفس القوس مع المركزية المعطاة

٢. ∢ ١ = ٣٠° بسبب تقابل بالرأس مع ∢ ص

٣. ∢ ٢ = ١٨٠° - ٢٣°= ١٥٧° (بسبب أنها زاوية مستقيمة)

٤. ∢ ٣ = ١٨٠ - ٢٣° = ١٥٧° (بسبب أنها زاوية مستقيمة)

٥. ∢ع = ٣٦٠° - (٣٠° + ١٥٧ + ١٥٧) وذلك لأن مجموع زوايا المضلع الرباعي = ٣٦٠°

∢ع = ٣٦٠ - ٣٣٤° = ١٦°

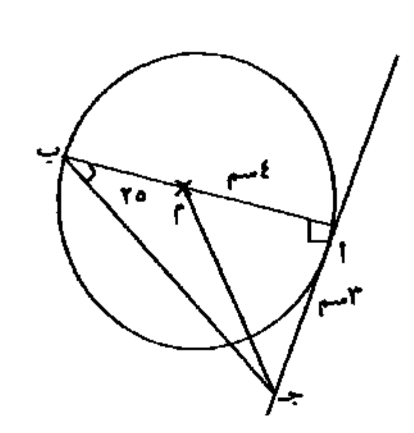
* **سؤال:**

في الشكل المجاور معطى أن

أ م = ٤ سم

أ ج = ٣ سم

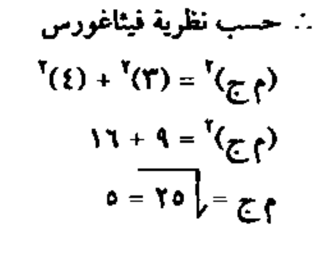
∢ أ ب جـ = ٢٥°



* **جد ما يلي:**

١. جد طول الضلع م ج؟

Δ م أ جـ قائم الزاوية في (أ)



∴ حسب نظرية فيثاغورس

(م ج)^2 = (٣)^2 + (٤)^2

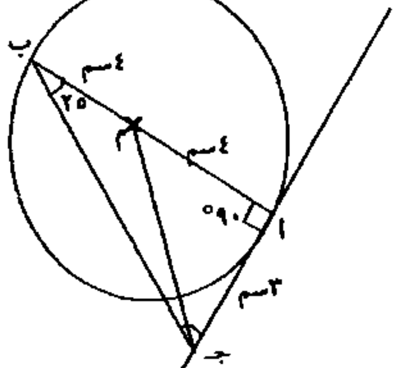
(م ج)^2 = ٩ + ١٦

م ج = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

٢. جد طول ضلع ب جـ؟

Δ ب أ جـ قائم الزاوية

في أ (نق ⊥ مماس)



الحل: حسب نظرية فيثاغورس:

(ب جـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ جـ)^2

(ب جـ)^2 = (٨)^2 + (٣)^2

(ب جـ)^2 = ٦٤ + ٩

(ب جـ)^2 = ٧٣

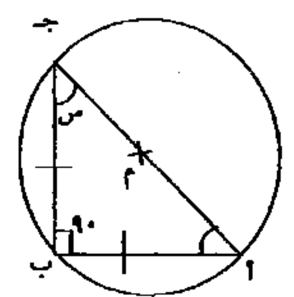
ب جـ = $\sqrt{٧٣}$

٣. $\sphericalangle$ أ جـ ب = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°)

$\sphericalangle$ أ جـ ب = ١٨٠° − (١١٥°)

$\sphericalangle$ أ جـ ب = ٦٥° لأن مجموع زوايا المثلث تساوي ١٨٠°

* سؤال:



في الشكل المجاور جد $\sphericalangle$ س

$\sphericalangle$ ب = ٩٠ (محيطية تقابل القطر)

$\sphericalangle$ س = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥

(لأن المثلث متساوي الساقين يكون فيه زاويتا القاعدة متساوية)

(٣-٣) التطابق

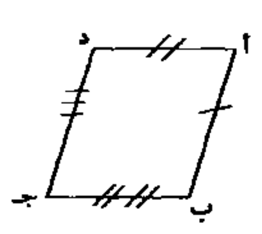
تعريف التطابق:

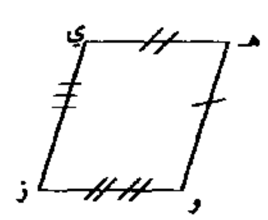
تكون الأشكال الهندسية متطابقة إذا:

١. إذا كانت جميع الأضلاع المتناظرة متساوية في الطول.

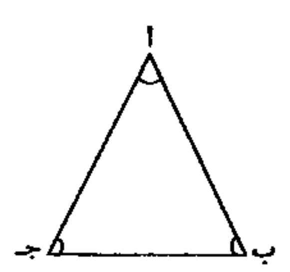
٢. وإذا كانت جميع الزوايا المتناظرة متساوية في القياس.

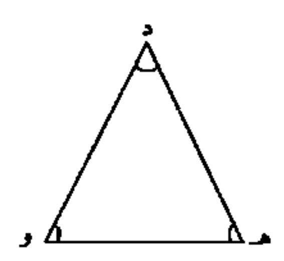
ويرمز لهُ (≅)





* سنتحدث بشكل خاص عن تطابق المثلثات:





المثلثان أ ب جـ د هـ و متطابقان إذا كان:

أ ب = د هـ ، ∢ أ = ∢ د

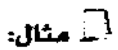
أ جـ = د و ، ∢ ب = ∢ هـ

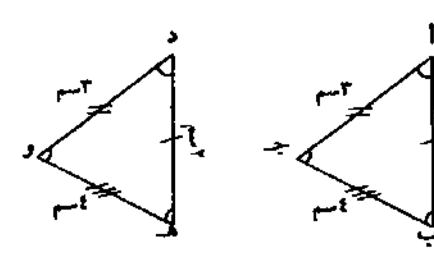
ب جـ = هـ و ، ∢ جـ = ∢ و

(٣-٤) حالات تطابق المثلثات:

* لبرهان أن مثلثين متطابقين، يمكن إتباع الحالات الأربعة التالية:

١. الحالة الأولى: تطابق بثلاثة أضلاع (SSS) إذا تساوت ثلاثة أضلاع متناظرة

 مثال:



Δ أ ب جـ ≡ Δ د هـ و بثلاثة أضلاع، حيث:

$\overline{أجـ}$ ≡ $\overline{دو}$ = ٣سم

$\overline{أب}$ ≡ $\overline{دهـ}$ = ٢سم

$\overline{بجـ}$ ≡ $\overline{هـو}$ = ٤سم

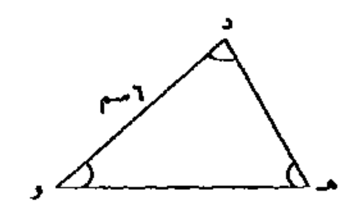
ينتج من التطابق أن:

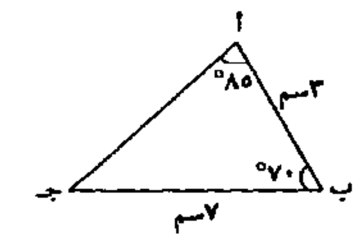
∢ أ = ∢ د

∢ ب = ∢ هـ

∢ جـ = ∢ و

مثال: إذا كان Δ أ ب ج ≡ Δ د هـ و





جد ∢ د، ∢ و، ∢ هـ طول الضلع $\overline{أجـ}$، $\overline{دهـ}$، هـ و؟

الحل:

بما أن المثلثان متطابقان ينتج أن

∢ أ = ∢ د = °٨٥ $\overline{أج}$ = $\overline{دو}$ = ٦سم

∢ و = ∢ج = °٢٥ $\overline{دهـ}$ = $\overline{أب}$ = ٣سم

∢ ب = ∢ هـ = °٧٠ $\overline{هـو}$ = $\overline{بجـ}$ = ٧سم

مثال: في الشكل المجاور إذا علمت أن

$\overline{أ ب} = \overline{أ د}$

$\overline{ب ج} = \overline{د ج}$

أ) اثبت أن ∆ أ ب ج = ∆ أ د ج

ب) عين زواياهما المتطابقة

الحل:

أ) ١. أ ب = أ د (معطى)

٢. ب ج = د ج (معطى)

٣. أ ج = أ ج أي ضلع مشترك

∴ ∆ أ ب ج ≅ ∆ أ د ج

إذن يتطابق المثلثان بثلاثة أضلاع.

ب) ينتج من التطابق أن الزوايا المتناظرة متساوية

∢ ب = ∢ د ، ∢ ب أ ج = ∢ د أ ج، ∢ أ ج ب = ∢ أ ج د

٢. الحالة الثانية:

(S A S) (ضلع، زاوية، ضلع)، يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محصورة.

مثال:

∢ ب = ∢ هـ = ٧٠°

أ ب = د هـ = ١٠

ب جـ = هـ و = ١٥

ينتج من التطابق حسب (ضلع، زاوية، ضلع)

∢ أ = ∢ د

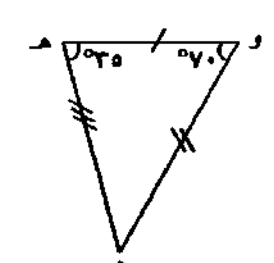
والضلع أ جـ = د و

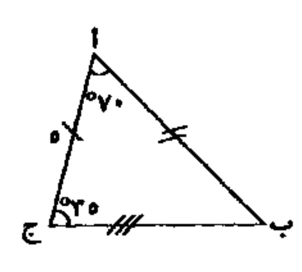
∢ ج = ∢ و

٣. الحالة الثالثة:

(ضلع، زاوية، زاوية) (SAA): التطابق بضلع وزاويتين

مثال:





∡ هـ = ∡ أ

∡ جـ = ∡ و

الضلع أ ج = هـ و

∴ يتطابق المثلثان حسب (زاوية، ضلع، زاوية)

وينتج من التطابق أن: ∡ ب = ∡ د

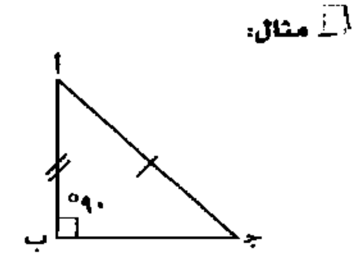
ب ج = د و

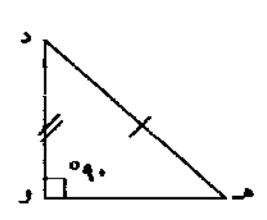
أ ب = هـ د

٤. الحالة الرابعة:

(فقط للمثلث القائم الزاوية) يتطابق المثلثان القائمان بوتر وضلع (HS)

مثال:





أ جـ = د و

أ ب = د هـ

∴ يتطابق المثلثان بوتر وضلع (HS)

وينتج من التطابق أن

∡ جـ = ∡ و

∡ أ = ∡ د

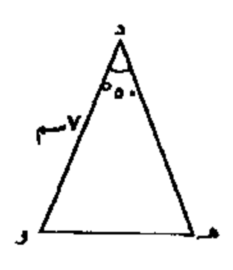
ب ج = هـ و

* **سؤال:**

إذا علمت أن

∆ أ ب ج ≅ ∆ د هـ و،

انظر الشكل



جد الأضلاع والزوايا غير المعطاة في ∆ أ ب جـ وفي ∆د هـ و

* **الحل:**

أ جـ = د و = ٧سم

∢ أ = ٥٠° (يساوي ∢ د)

∢ ب = ∢ هـ = ١٨٠ – (٥٠ + ٥٥)

∢ ب = ∢ هـ = ١٨٠° – ١٠٥°

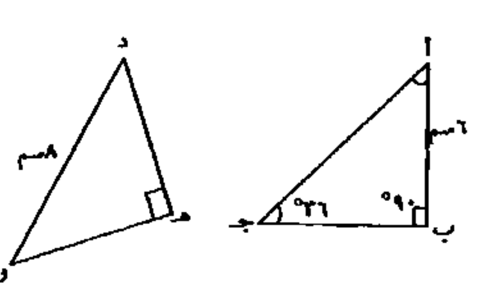
∢ ب = ∢ هـ = ٧٥°

∢ و = ∢ ج = ٥٥°

د هـ = أ ب = ٥سم // ب جـ = هـ و = ٦سم

* **سؤال:**

في الشكل المجاور معطـــى أن المثلـــثين متطابقين، جد ما يلي:



١) ∢ أ

٢) طول ب جـ

الحل:

١) ∢ أ = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٦°)

∢ أ = ١٨٠° − ١٢٦°

∢ أ = ٥٤°

٢) أ جـ = ٨سم (لأن المثلثين متطابقين)

بما أن المثلث قائم الزاوية نستخدم نظرية فيثاغورس

(الوتر)^{٢} = (الضلع ١)^{٢} + (الضلع ٢)^{٢}.

(٨)^{٢} = (٦)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

٦٤ − ٣٦ = (ب جـ)^{٢}

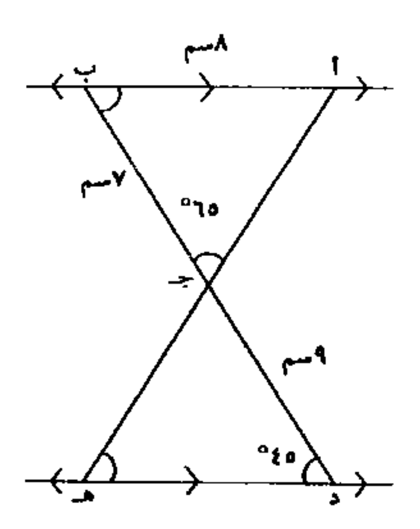
٢٨ = (ب جـ)^{٢}

∴ ب جـ = $\sqrt{٢٨}$

★ سؤال:

معطى أن ∆ أ ب جـ ≅ د هـ جـ

جـد جميـع الزوايـا والأضـلاع غـير المعطاة في المثلثين؟



∢أ = ∢د = ٤٥° ⇐ بالتطابق

∢أ جـ ب = ∢د جـ و= ٦٥° ⇐ تقابل بالرأس

∢ب = ∢هـ = ١٨٠ – (٤٥ + ٦٥)

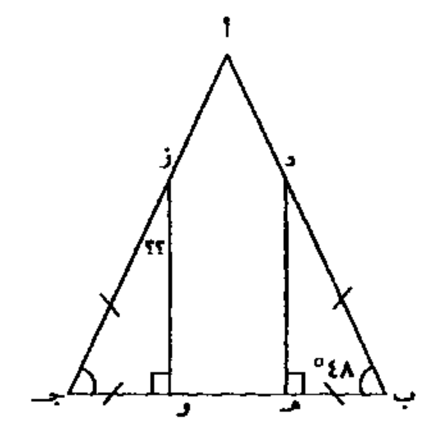
∢ب = ∢هـ = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

(لأن مجموع زوايا الداخلية للمثلث ١٨٠°)

أ ج = د ج = ٩سم (من التطابق)

أ ب = د هـ = ٨سم

ب جـ = جـ هـ = ٧سم



*** سؤال: في الشكل المجاور،**

معطى أن

ب هـ = و جـ

ب د = ز جـ

∢ب = ٤٨°

جد ∢وزج

الحل:

∆ ب هـ و، ∆ جـ و ز قائمي الزاوية

وهما متطابقان بضلع ووتر حسب المعطى (HS)

ينتج من التطابق أن

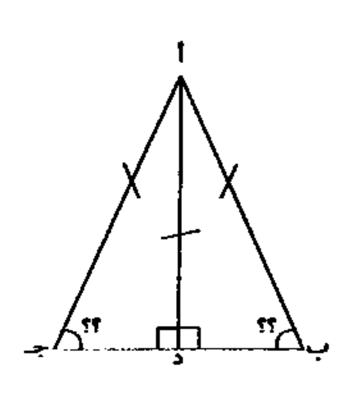
∢و ز ج = ∢ب د هـ

∢و ز ج = ١٨٠ – (٤٨° + ٩٠°)

∢و ز جـ = ١٨٠ – ١٣٨

∢و ز جـ = ٤٢°





★ **سؤال:**

أثبت أن زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متساويتان.

البرهان:

نزل العمود (أ د)

أ ب = أ جـ (معطى)

أ د = أ د (ضلع مشترك بين المثلثين)

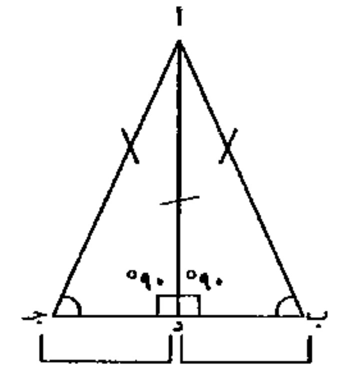
∴ يتطابق المثلثان بضلع ووتر

وينتج من التطابق أن

∢ أ ب جـ = ∢ أ جـ ب

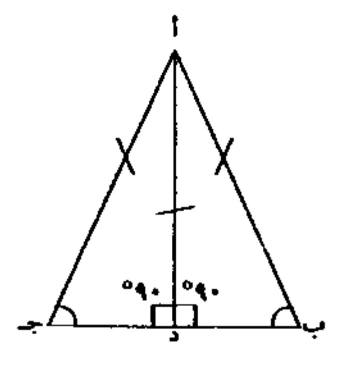
(زاويتا القاعدة)

وهو المطلوب



★ **سؤال:**

أثبت أن العمود النازل من رأس المثلث متساوي الساقين على القاعدة بنصف القاعدة؟



البرهان:

أ ب = أ جـ (معطى)

أ د = أ د (ضلع مشترك بين المثلثين)

أ د ⊥ ب جـ

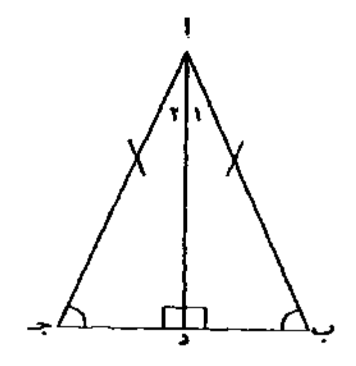
∴ يتطابق المثلثان بضلع ووتر

وينتج من التطابق:

أن ب د = جـ د وهو المطلوب

* سؤال:

أثبت أن العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصف زاوية الرأس؟



البرهان:

أ ب = أ جـ (معطى)

أ د = أ د ضلع مشترك

∴ يتطابق المثلثان بضلع ووتر

وينتج من التطابق أن

∢ ١ = ∢ ٢

∴ (أ د) ينصف الزاوية (أ)، وهو المطلوب.

★ **سؤال:**

من الشكل المجاور أثبت أن

ب ج = ج هـ؟

الحل:

١. أ ج = ج د (معطى)

٢. ∢ أ جـ ب = ∢ د ج هـ (تقابل بالرأس)

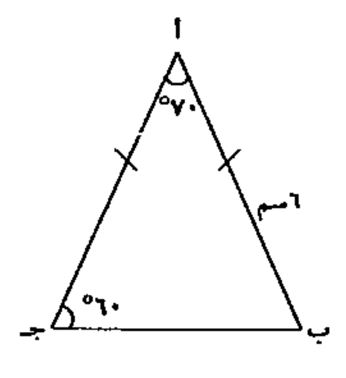
٣. ∢ ب أ ج = ∢ هـ د ج بالتبادل

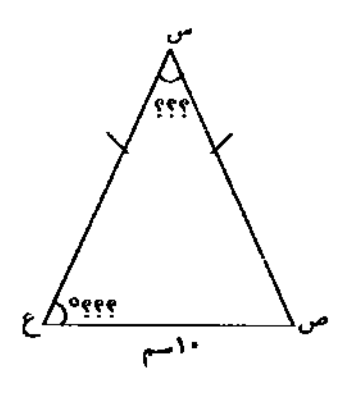
∴ يتطابق المثلثان بزاويتين وضلع وينتج من التطابق أن

ب ج = جـ هـ وهو المطلوب.

★ **سؤال:**

الشكل المجاور يمثل المثلثين (أ ب جـ)، (س ص ع) المتطابقين





جد ما يلي:

∢ س، ∢ص، ∢ع

س ص، ب جـ

الحل:

∠ أ = ∠ س = ٧٠° (بالتطابق)

∠ جـ = ∠ ع = ٦٠° (بالتطابق)

∠ ب = ∠ ص = ١٨٠ − (٧٠ + ٦٠)

= ١٨٠ − ١٣٠

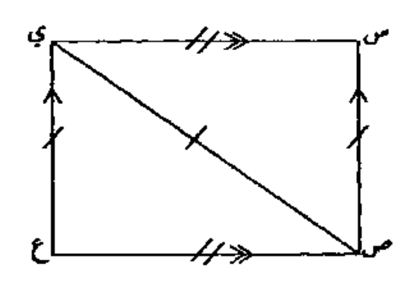
= ٥٠° (لأن مجموع زوايا المثلث الداخلية ١٨٠°)

س ص = ٦سم
ب جـ = ١٠سم
لأن المثلثين متطابقين

* سؤال: الشكل المجاور يمثل متوازي الأضلاع س ص ع ي



اثبت ان



أ. ∠ س = ∠ ع

ب. ∠ ص = ∠ ي

الحل: أ. تصل ص ي

س ص = ي ع
ص ع = س ي
(من خصائص متوازي الأضلاع أن الأضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية)

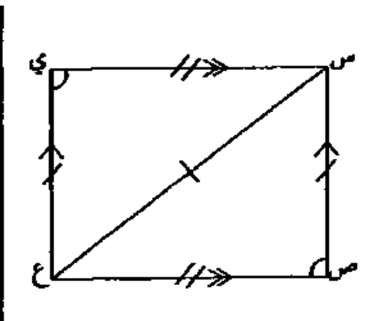
ص ي = ص ي (ضلع مشترك)

∴ يتطابق المثلثان بثلاثة أضلاع (SSS) وينتج أن



∢ س = ∢ ع وهو المطلوب

ب- نصل س ع



الحل:

نصل (س ع)

س ص = ي ع
ص ع = س ي
(من خصائص متوازي الأضلاع أن الأضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية)

س ع = س ع (ضلع مشترك بين المثلثين)

∴ يتطابق المثلثان بثلاثة أضلاع (SSS)

وينتج من التطابق أن ∢ ص = ∢ ي، وهو المطلوب.

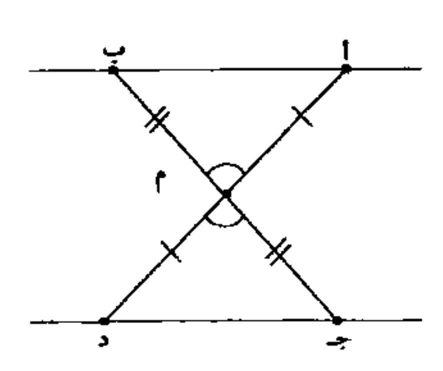
* سؤال:

في الشكل المجاور

أ م = م د،

ب م = م جـ

اثبت أن Δ أ م ب ≅ Δ د م جـ



البرهان:

∢ أ م ب = ∢ جـ م د (تقابل بالرأس)

أ م = م د (معطى)

ب م = م جـ (معطى)

∴ يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محصورة

(٣-٤) التشابه (~)

تعريف التشابه:

تتشابه الأشكال الهندسية إذا كانت:

١. جميع الزوايا المتناظرة متساوية

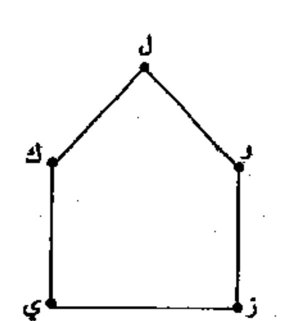
٢. الأضلاع المتناظرة متناسبة (بمعنى أن حاصل القسمة متساوي)

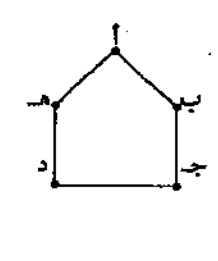
مثال:



$$\frac{١}{٣}=\frac{٢}{٦}=\frac{٥}{١٥}=\frac{٧}{٢١}$$

مثال: الشكلين المجاورين متشابهين





نتيجة التشابه هو:

زوايا الشكل الأول = زوايا الشكل الثاني

⇐ ∢ ب = ∢ و

⇐ ∢ أ = ∢ ل

⇐ ∢ هـ = ∢ ك

⇐ ∢ ج = ∢ ز

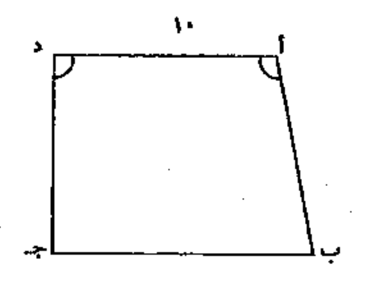
⇐ ∢ د = ∢ ي

أيضاً:

$$\frac{\text{ل و}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ل ك}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ك ي}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{ز ي}}{\text{ج د}} = \frac{\text{و ز}}{\text{ب ج}} \left(\frac{\text{الكبير}}{\text{صغير}}\right)$$

★ **سؤال:**

إذا علمت أن المضلع أ ب ج د ~ س ص ع ل



(١) ∢ أ، ∢ د، ∢ جـ ∢ ب

(٢) طول أ ب

الحل:

(١) ∢ أ = ∢ س = ١٣٠° (من التشابه)

∢ د = ∢ ل = ١١٠° (من التشابه)

∢ ج = ∢ ع = ٨٠° (من التشابه)

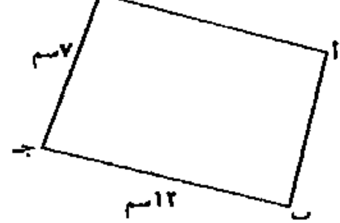
∢ ب = ٣٦٠ − (١٣٠° + ١١٠ + ٨٠)

= ٣٦٠° − ٣٢٠° = ٤٠° (لأن مجموع الشكل الرباعي هو ٣٦٠°)

(٢) $\frac{١٠}{٦} \times \frac{أب}{٥}$

⇐ ٦ × أب = ٥٠ ⇐ أب = $\frac{٥٠}{٦}$ = ٨,٣

* سؤال: إذا علمت أن المضلعين المجاورين متشابهين،



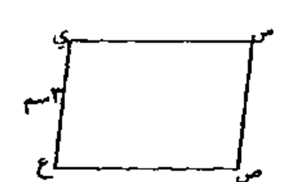
د جـ = ٧سم

ي ع = ٣سم

ب جـ = ١٢سم

جد ص ع؟

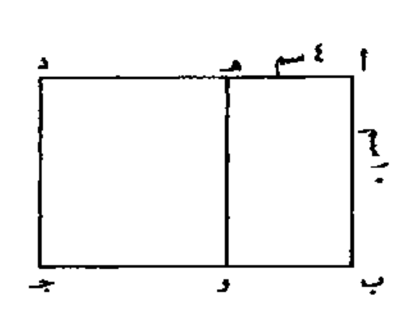
$\frac{٧}{٣} \times \frac{١٢}{ص ع}$



٧×ص ع=٣×١٢=٣٦

⇐ص ع=$\frac{٣٦}{٧}$=٥,١٤

***سؤال:**



معطى أن

أ ب جـ د ~ أ هـ و ب

حيث

أ هـ = ٤سم

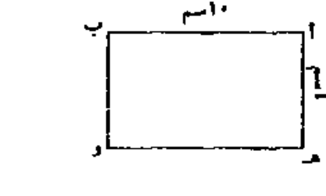
أ ب = ١٠سم

المطلوب جد طول (أ د)

الحل:

$$\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{أب}}{\text{أد}}$$

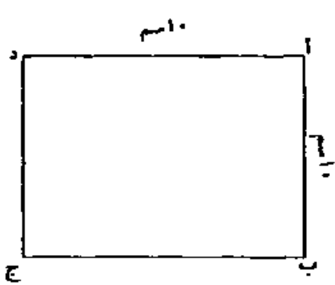
$$\frac{٤}{١٠} = \frac{١٠}{\text{أد}}$$



$$٤ \times \text{أ د} = ١٠ \times ١٠$$

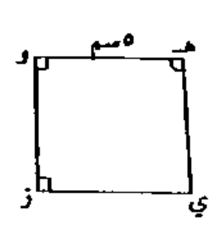
$$\frac{٤\text{أد}}{٤} = \frac{١٠٠}{٤}$$

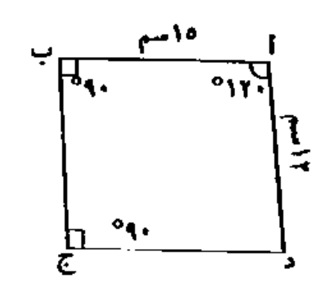
$$\text{أ د} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$$



★ سؤال:

الشكلين المجاورين متشابهين





جد ما يلي:

١. ∢ هـ ، ∢ و ، ∢ ز ، ∢ ي

٢. طول الضلع (هـ ي)

الحل:

١. ∢ هـ = °١٢٠
∢ و = °٩٠ — من التشابه
∢ ز = °٩٠

∢ ي = ٣٦٠ − (°١٢٠ + °٩٠ + °٩٠)

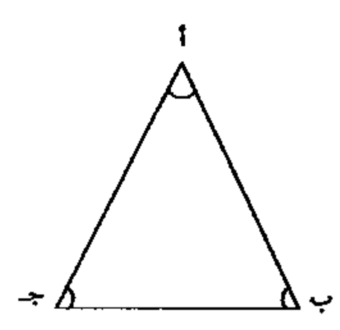
= ٣٦٠ − ٣٠٠ = °٦٠

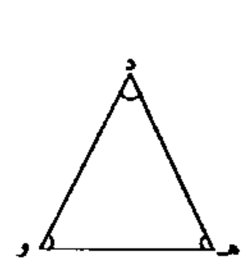
(لأن مجموع زوايا الشكل الرباعي = °٣٦٠)

٢. طول الضلع هـ ي ←

$\frac{١٥}{٥} = \frac{١٢}{هـ ي} \Leftarrow \frac{١٥ \times هـ ي}{١٥} = \frac{٥ \times ١٢}{١٥} \Leftarrow$ هـ ي = ٤سم

(٣-٥) تشابه المثلثات





يتشابه المثلثان إذا كانت:

١. الزوايا المتناظرة متساوية

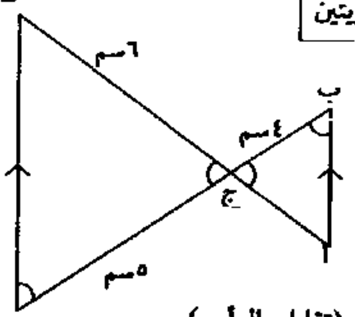
∢ أ = ∢ د ، ∢ ب = ∢ هـ ، ∢ ج = ∢ و

٢. الأضلاع متناسبة

$$\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{دو}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}}$$

* لإثبات أن مثلثين متشابهين يكفي أن نبرهن أن زاويتين متناظرتين متساويتين

مثال: في الشكل المجاور:



أ. اثبت أن المثلث

Δ أ ب ج ~ Δ د هـ ج

٢. جد طول (أ جـ)

الحل: (١) ∢ ب ج أ = ∢ هـ ج د (تقابل بالرأس)

∢ أ ب ج = ∢ ج د هـ (بالتبادل)

إذن نستنتج أن المثلثين متشابهين وهو المطلوب

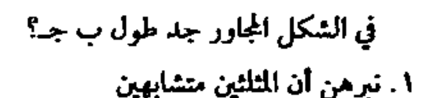
٢. من التشابه نستنتج ⇐

$$\frac{٥}{٤} \times \frac{٦}{أ جـ}$$

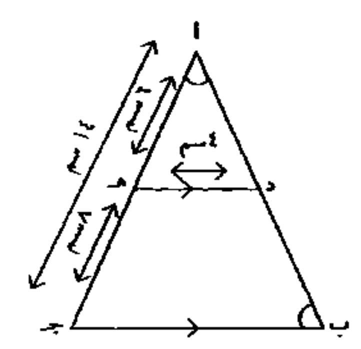
٥ × أ جـ = ٦ × ٤ = ٢٤

$$أ جـ = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$$

★ **سؤال:**



في الشكل المجاور جد طول ب جـ؟



١. نبرهن أن المثلثين متشابهين

∢ أ = ∢ أ

(مشتركة بين المثلثين)

∢ أ د هـ = ∢ أ ب جـ (تناظر)

∴ المثلثين متشابهين

$$\frac{ب جـ}{٤} \times \frac{١٤}{٦}$$

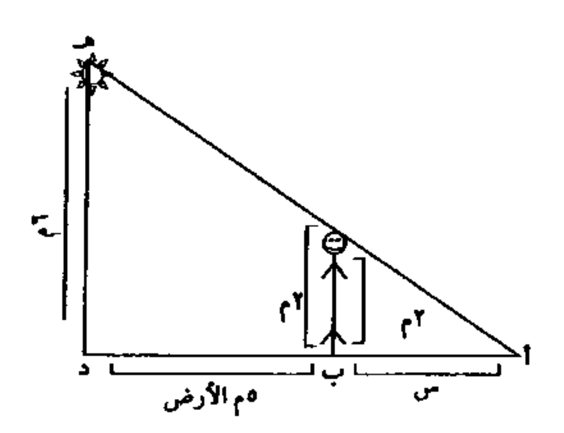
٦ × ب جـ = ٤ × ١٤

$$⇐ ب جـ = \frac{٥٦}{٣} = ١٨,٧$$

★ **سؤال:**

رجل طوله ٢م يقف أمام مصباح على عمود مرتفع عن الأرض ٦م، فإذا علمت أن المسافة بين الرجل وأسفل العمود هي ٥م، جد طول ظل الرجل على الأرض.

الحل:



نبرهن أولاً أن المثلثين متشابهين.

∢ أ = ∢ أ مشتركة

∢ هـ د ب = ∢ جـ ب أ (قوائم)

∴ المثلثين متشابهين

$$\frac{٦}{٢} \times \frac{٥+س}{س}$$

٦ س = ١٠ + ٢س

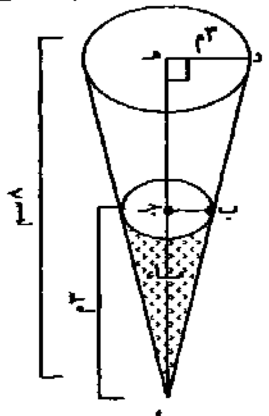
٦س − ٢س = ١٠

٤س = ١٠

$$س = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥م$$

* سؤال:

خزان ماء على شكل مخروط ارتفاعهُ ٨م ونصف قطر قاعدتهُ ٣م ارتفاع الماء فيه ٣م، جد نصف قطر المخروط المائي؟



نبرهن أولاً أن المثلثين متشابهين:

∢ ب أ جـ = ∢ ب أ جـ (مشتركة)

∢ ب ج أ = ∢ د هـ أ بسبب (قوائم)

∴ المثلثين متشابهين

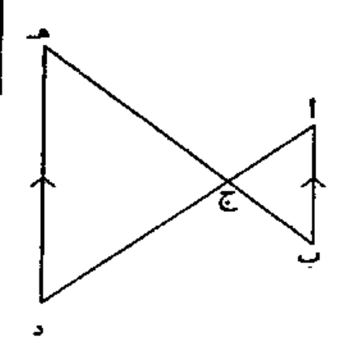
$\frac{٣}{س} = \frac{٨}{٣} \Leftarrow ٨ \times س = ٣ \times ٣$

$\frac{٨س}{٨} = \frac{٩}{٨} \leftarrow س = \frac{٩}{٨} = ١,١$

أسئلة نهاية الوحدة الثالثة

س١: أثبت أن الزاوية المحيطية المرسومة على قطرة الدائرة قائمة.

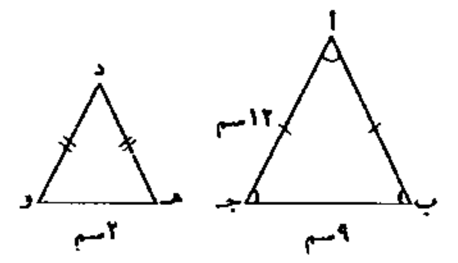
س٢: في الشكل المجاور أثبت أن
Δ أ ب جـ ~ Δ هـ د جـ



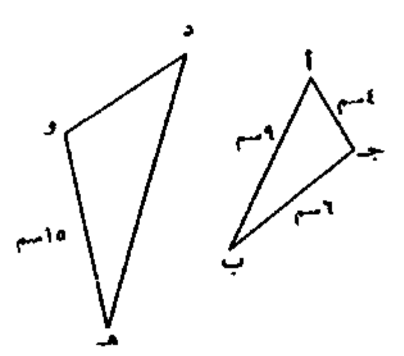
س٣: أثبت باستخدام التطابق أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متساوية.

س٤: في الأشكال التالية جد أطوال الأضلاع غير المعطاة.

أ)



ب)

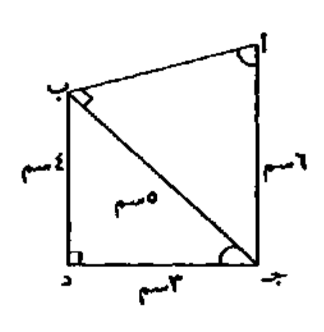


س٥: في الشكل المجاور

∢ جـ أ ب = ∢ ب جـ د

أ) اثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ جـ د ب

ب) جد طول أ ب

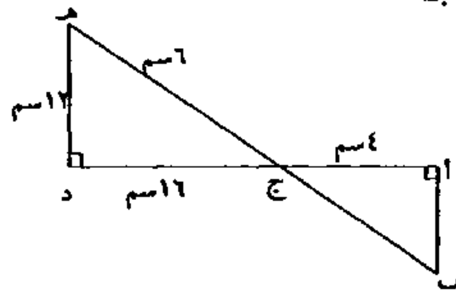


س٦: في الشكل المجاور:

١. اثبت أن Δ ب أ جـ ~ Δ هـ د جـ

٢. جد طول أ ب

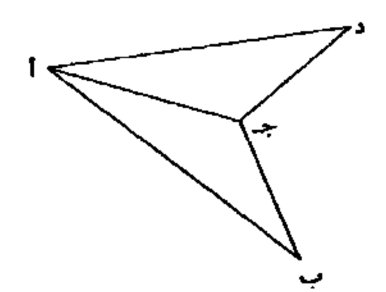
٣. جد طول ب جـ



س٧: في الشكل المجاور

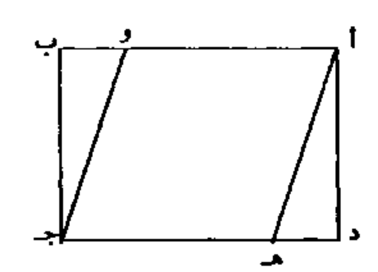
أ ب = أ د، ب جـ = جـ د

اثبت أن أ جـ ينصف الزاوية ب أ د ؟



س٨: أ ب جـ د مستطيل، فيه أ هـ = جـ و (انظر الشكل)

اثبت أن د هـ = و ب



س٩: مخروط ارتفاعهُ ٢٠سم ونصف طول قاعدتهُ ٨سم فيه ماء على ارتفاع ١٥سم جد نصف قطر سطح الماء؟

الحل:

١. نبرهن أن المثلثين Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د

لكي نبرهن أن المثلثين متشابهين يجب إثبات أن الزاويتين متساويتين

١. ∢ أ مشتركة

∢ د هـ أ = ∢ ب جـ أ بسبب قوائم

ينتج من التشابه

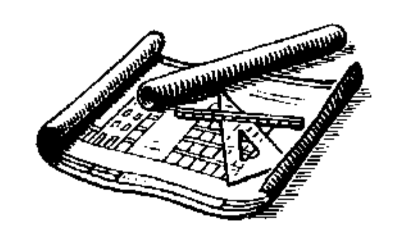
$$\frac{٢٠}{١٥} \times \frac{٨أ}{دهـ}$$

$$\Leftarrow \frac{٢٠ دهـ}{٢٠} = \frac{٨ \times ١٥}{٢٠}$$

$$دهـ \Leftarrow \frac{١٢٠}{٢٠} = ٦$$

الوحدة الرابعة

الهندسة التحليلية (الإحداثية)



الوحدة الرابعة
الهندسة التحليلية (الإحداثية)

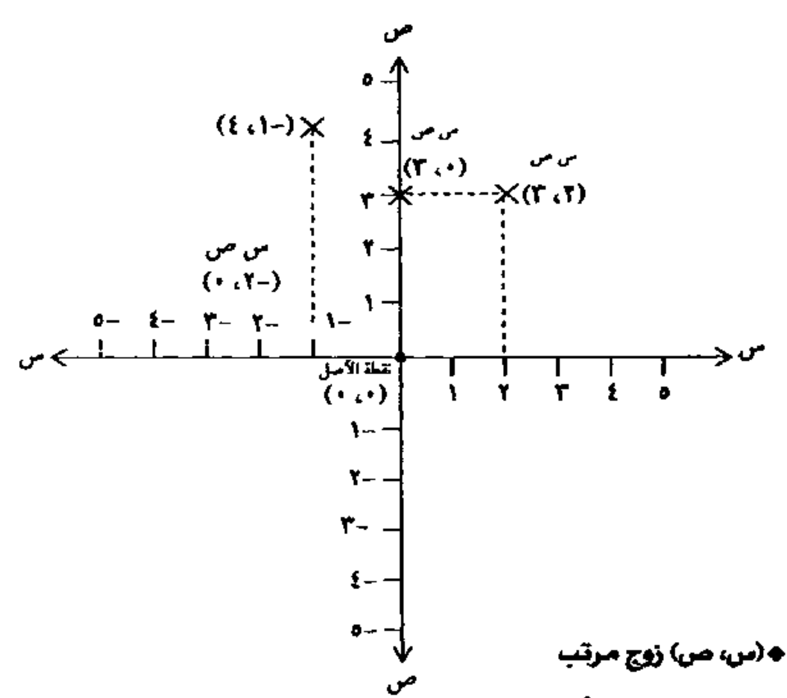
(٤-١) المستوى الديكارتي:

هو مستوى يتكون من محورين متعامدين، يسمى الأفقي محور (س) ويسمى العمودي محور (ص).

★ سؤال:

حدد النقاط الآتية على المستوى الديكارتي

(-١، ٤) (٠، ٣) (-٢، ٠) (٢، ٣)



◆ (س، ص) زوج مرتب

- س: المسقط (الأحداثي) السيني
- ص: المقسط (الأحداثي) الصادي

(٤-٢) المسافة بين نقطتين:

١. لإيجاد المسافة بين النقطتين:

$(س_1 ، ص_1)$ $(س_2 ، ص_2)$

نستخدم القانون

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

٢. احداثيات منتصف المسافة بين نقطتين

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$$

مثال: جد المسافة بين النقطتين $(١١ ، ٢)$ ، $(-٢ ، -٤)$

الحل:

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

$$ف = \sqrt{(-٢ - {}^{-}١)^2 + (-٤ - ٢)^2}$$

$$ف = \sqrt{١ + ٣٦}$$

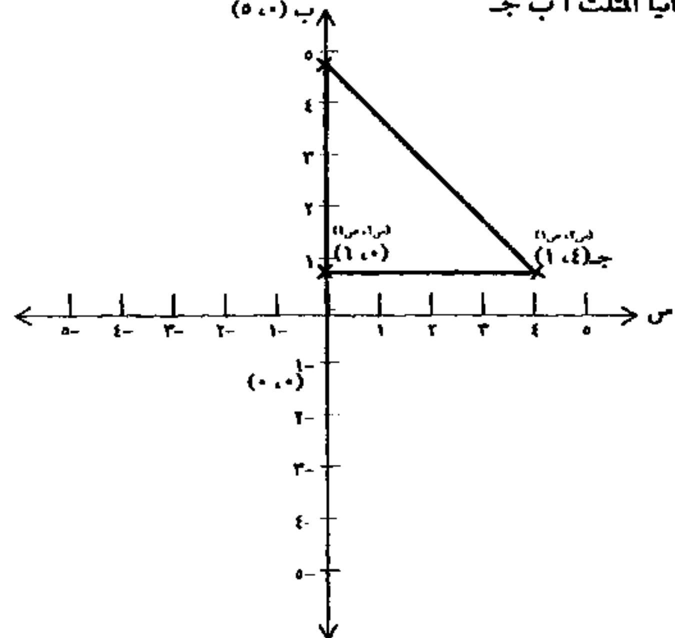
$$ف = \sqrt{٣٧}$$

*** سؤال:**

النقطة أ (٠، ١)، ب (٠، ٥) جـ (٤، ١) هذه النقاط تمثل رؤوس المثلث أ ب ج

المطلوب

١. ارسم بيانياً المثلث أ ب جـ



٢. جد أطوال أضلاع المثلث (أ ب ج)

أ (٠، ١)   جـ (٤، ١)

$$\text{أ جـ} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$\text{أ جـ} = \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (١ - ١)^٢}$$

$$\text{أ جـ} = \sqrt{(٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

أ ب = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٠ + ٠)^٢ + (٥ - ١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٤)^٢} = \sqrt{١٦}$

جـ ($\overset{\text{س}_١}{٤}$ ، $\overset{\text{ص}_١}{١}$) ب. ($\overset{\text{س}_٢}{٠}$ ، $\overset{\text{ص}_٢}{٥}$)

جـ ب = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

جـ ب = $\sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٥ - ١)^٢}$

جـ ب = $\sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢}$

جـ ب = $\sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$

٣. اثبت أن المثلث ب أ ج قائم الزاوية في (أ)

(الوتر)^٢ = (الضلع الأول)^٢ + (الضلع الثاني)^٢

$(\sqrt{٣٢})^٢ = (٤)^٢ + (٤)^٢$

$٣٢ = ١٦ + ١٦$

$٣٢ = ٣٢$

∴ المثلث قائم الزاوية وهو المطلوب

* سؤال:

النقاط (أ ب جـ) هي رؤوس مثلث

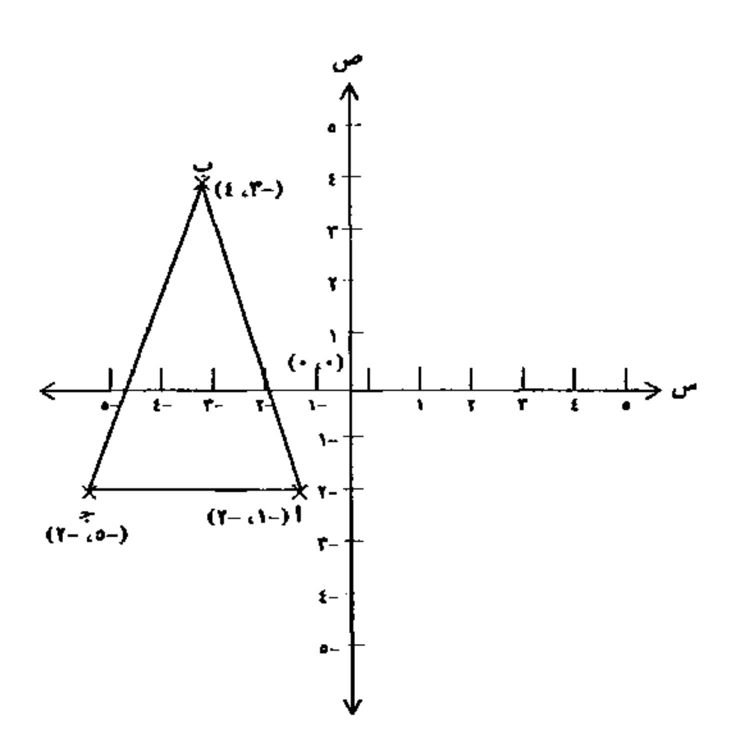
حيث

أ. $(-1, -2)$ ب. $(-3, 4)$ جـ. $(-5, -2)$

المطلوب:

أثبت أن المثلث متساوي الساقين

الحل:



* أولاً: نجد طول (أ ب)

$$أ ب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

أ ب = $\sqrt{(-٣ - ^{-}١)^{٢} + (٤ - ^{-}٢)^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{(-٢)^{٢} + (٦)^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٦)^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{٤ + ٣٦}$

أ ب = $\sqrt{٤٠}$

* ثانياً: نجد طول (ب جـ)

س١ ص١   س٢ ص٢

ب جـ / ب (-٣ ، ٤) جـ (-٥ ، -٢)

ب جـ = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{(-٥ - ^{-}٣)^{٢} + (-٢ - ٤)^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{(-٢)^{٢} + (-٦)^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{٤ + ٣٦} = \sqrt{٤٠}$

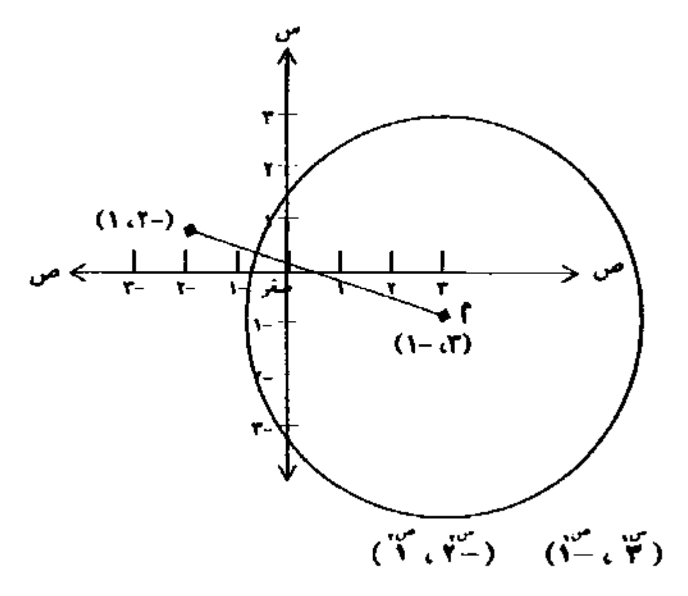
∴ أ ب = ب جـ

∴ المثلث متساوي ساقين



* سؤال:

دائرة مركزها (٣،-١) وتمر بالنقطة (-٢، ١)، جد طول نصف قطرها



(٣، -١)   (-٢، ١)

نق = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

نق = $\sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (١ - -١)^٢}$

نق = $\sqrt{(٥)^٢ + (٢)^٢}$

نق = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ ⟸ نق = $\sqrt{٢٩}$

* سؤال:

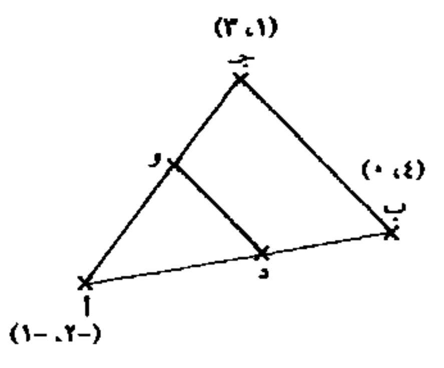
النقاط أ(-٢، -١) ب(٤، ٠) جـ(١، ٣)، هي رؤوس المثلث أ ب جـ

١. جد طول $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$، $\overline{بجـ}$

٢. جد طول $\overline{أد}$، $\overline{أو}$ حيث (د) هي منتصف الضلع أ ب و (و) هي منتصف الضلع $\overline{أجـ}$

٣. جد طول د و

٤. قارن بين طول د و مع طول ب جـ



الحل:

أ (-٢، -١) ب (٤، ٠) جـ (١، ٣)

١. جد طول أ ب ، أ جـ ، ب جـ

١. أ ب = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٤ - {}^-٢)^٢ + (٠ - {}^-١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(٦)^٢ + (١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{٣٦ + ١}$

أ ب = $\sqrt{٣٧}$

أ (-٢ ، -١) جـ (١ ، ٣)

٢. أ جـ = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

أ جـ = $\sqrt{(١ - {}^-٢)^٢ + (٣ - {}^-١)^٢}$

$$أ جـ = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$$

$$أ جـ = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

٣. $$ب جـ = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$ب جـ = \sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٣ - ٠)^٢}$$

$$ب جـ = \sqrt{(-٣)^٢ + (٣)^٢}$$

$$ب جـ = \sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$$

$$ب جـ = \sqrt{(٩) + (٩)}$$

$$ب جـ = \sqrt{١٨}$$

٢. جد طول أ د ، أ و

$$\overline{أ د} = \frac{\overline{أ ب}}{٢} = \frac{\sqrt{٣٧}}{٢}$$

$$\overline{أ و} = \frac{\overline{أ جـ}}{٢} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$$

٣. جد طول (د و)

نجد أولاً إحداثيات (د) هي منتصف المسافة أ ب وإحداثيات (و) هي منتصف المسافة أ جـ

أ (-٢ ، -١) ب (٤ ، ٠)

نستخدم قانون إحداثيات منتصف المسافة= $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

$$د = \left(\frac{-٢+٤}{٢} ، \frac{-١+٠}{٢}\right)$$

$$د = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right) \Leftarrow د = \left(١ ، \frac{-١}{٢}\right)$$

نجد إحداثيات (و) وهي منتصف المسافة أ جـ

أ (-٢ ، -١) جـ (١ ، ٣)

نستخدم قانون إحداثيات منتصف المسافة= $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

$$و = \left(\frac{-٢+١}{٢} ، \frac{-١+٣}{٢}\right)$$

$$و = \left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) \Leftarrow و = \left(\frac{-١}{٢} ، ١\right)$$

نستنتج أن ⇐ د = $\left(١ ، \frac{-١}{٢}\right)$ و= $\left(\frac{-١}{٢} ، ١\right)$

$$د\,و = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$د\,و = \sqrt{\left(١ - \frac{-١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-١}{٢} - ١\right)^٢}$$

$$د\,و = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-٣}{٢}\right)^٢}$$

$$د\,و = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٩}{٤}}$$

$$د\,و = \sqrt{\frac{١٨}{٤}} = \frac{\sqrt{١٨}}{٢}$$

٤) نستنتج أن طول د و = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ

د و = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٨} = \frac{\sqrt{١٨}}{٢}$

*** نظرية: القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعي في المثلث تساوي نصف طول الضلع المقابل بمعنى أن**

$\overline{دهـ} = \frac{١}{٢} \times \overline{ب جـ}$

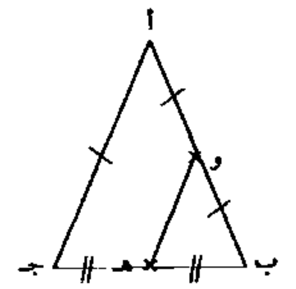
*** سؤال:**

إذا علمت أن طول (و هـ) = ٨سم

جد طول (أ جـ)؟

حسب النظرية السابقة

$\overline{أ جـ}$ = ٢ × ٨ = ١٦سم



*** سؤال:**

النقط أ، ب، جـ هي رؤوس مثلث

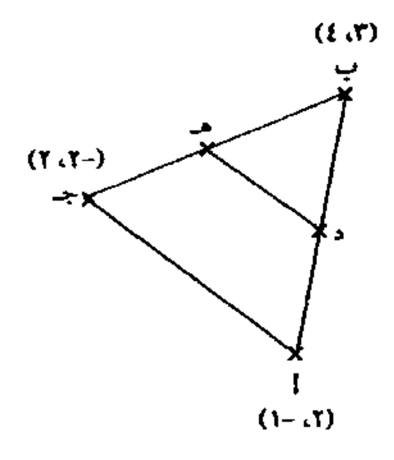
حيث أ (٢، -١)

ب (٣، ٤)

جـ (-٢، ٢)

جد طول القطعة المستقيمة بين منتصفي (أ ب) و (ب جـ)

الحل:



نجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$

$\overline{\text{أ جـ}} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

$\overline{\text{أ جـ}} = \sqrt{(٢ - ^-٢)^٢ + (-١ - ٢)^٢}$

$\overline{\text{أ جـ}} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢}$

$\overline{\text{أ جـ}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ حسب النظرية د هـ = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥

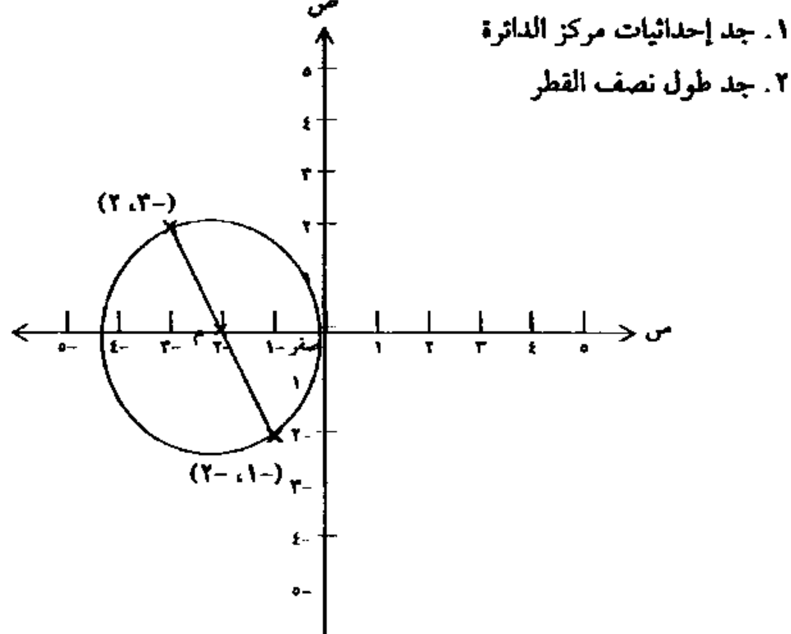
★ **سؤال:**

دائرة نهايتا قطر فيها هما النقطتان

(-١ ، -٢) (-٣ ، ٢)

١. جد إحداثيات مركز الدائرة

٢. جد طول نصف القطر



الحل:

١.

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

$$م = \left(\frac{-١ + -٣}{٢} ، \frac{-٢ + ٢}{٢} \right)$$

$$م = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{٠}{٢} \right)$$

$$م = (-٢ ، ٠)$$

٢. نق = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

نق = $\sqrt{(-٣ - -٢)^٢ + (٢ - ٠)^٢}$

نق = $\sqrt{(-١)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

★ سؤال:

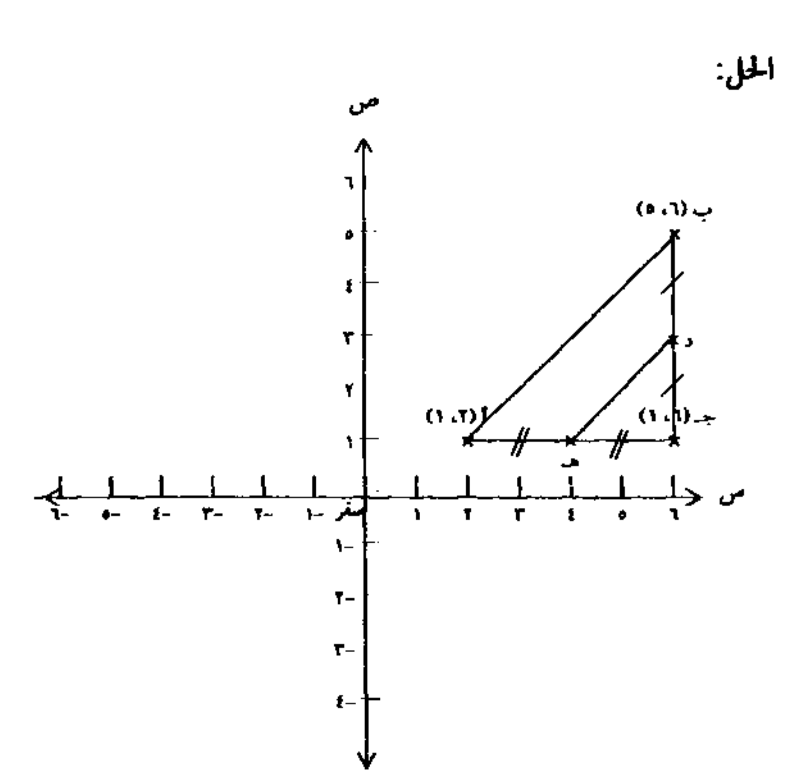
ارسم المثلث أ ب جـ، حيث

أ = (٢ ، ١)، ب = (٦، ٥)، جـ = (٦، ١)، ثم جد ما يلي:

١. أطوال أضلاعه

٢. القطعة الواصلة بين منتصفي $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$

الحل:



$$*\ ١)\ \overline{\text{جـ أ}} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\overline{\text{جـ أ}} = \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (١ - ١)^٢}$$

$$\overline{\text{جـ أ}} = \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(٦ - ٦)^٢ + (٥ - ١)^٢}$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

$$\overline{\text{ب أ}} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\overline{\text{ب أ}} = \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٥ - ١)^٢}$$

$$\overline{\text{ب أ}} = \sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢}$$

$$\overline{\text{ب أ}} = \sqrt{١٦ + ١٦}$$

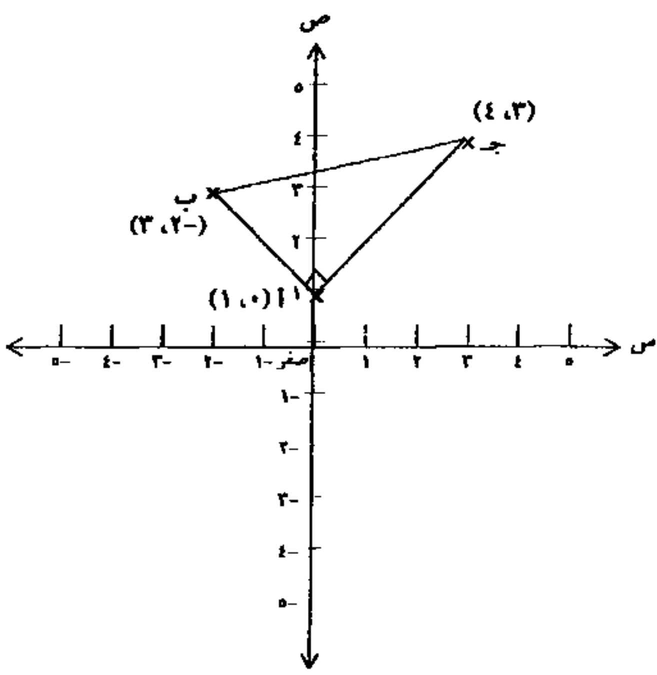
$$\overline{\text{ب أ}} = \sqrt{٣٢}$$

$$٢)\ \overline{\text{د هـ}} = \frac{١}{٢} \times \overline{\text{ب أ}}$$

$$\overline{\text{د هـ}} = \frac{\sqrt{٣٢}}{٢}$$

* **سؤال:**

إذا كانت أ (٠ ، ١)، ب (−٢ ، ٣)، جـ (٣ ، ٤)، أثبت أن المثلث ب أ جـ قائم الزاوية.



الحل:

نجد أن أطوال الأضلاع

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(٣ - {}^{-}٢)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}}$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(٥)^{٢} + (١)^{٢}}$$

$$\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$$

ملاحظة: الضلع الأكبر هو الوتر

طول أ ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(-٢ - ٠)^٢ + (٣ - ١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢)^٢}$

أ ب = $\sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$

طول أ جـ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أ جـ = $\sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

أ جـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$

أ جـ = $\sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

حسب نظرية فيثاغورس

(الوتر)^٢ = (الضلع ١)^٢ + (الضلع ٢)^٢

$(\sqrt{٢٦}) = (\sqrt{٨}) + (\sqrt{١٨})$

٢٦ = ٨ + ١٨

٢٦ = ٢٦

∴ المثلث قائم الزاوية

* سؤال:

إذا كانت أ (٢ ، ٢)، ب (٠، ٢)، جـ (٢، ٦) هي رؤوس مثلث جد إحداثيات منتصف الأضلاع أ ب، ب جـ أ جـ؟

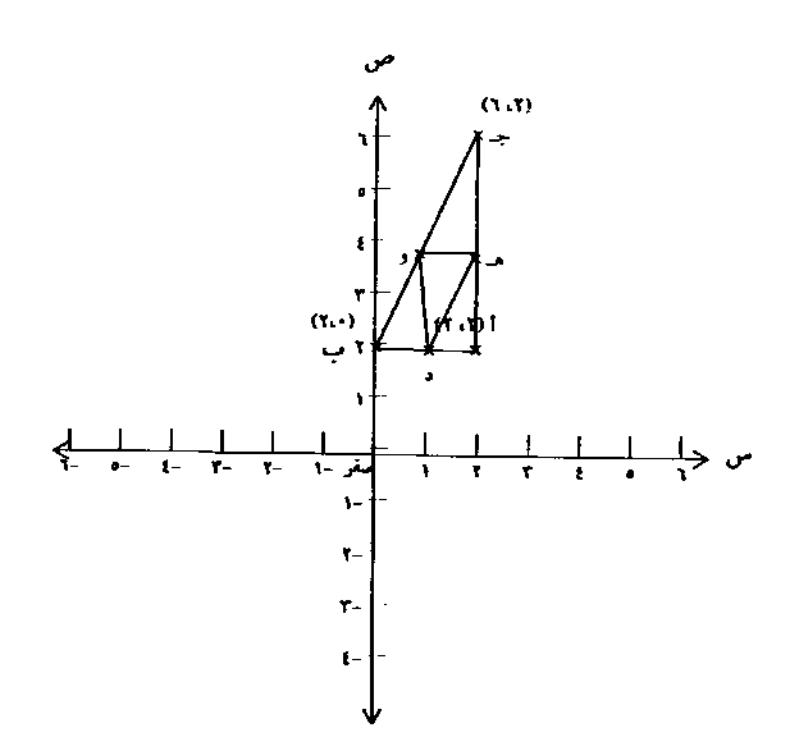
* الحل:

$$\text{منتصف أ ب} = د = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

$$\text{منتصف أ ب} = د = \left(\frac{٢+٠}{٢} ، \frac{٢+٢}{٢} \right)$$

$$\text{منتصف أ ب} = د = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٤}{٢} \right)$$

$$\text{منتصف أ ب} = د = (١ ، ٢)$$



منتصف ب جـ = و = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

منتصف ب جـ = و = $\left(\frac{٠+٢}{٢} ، \frac{٢+٦}{٢}\right)$

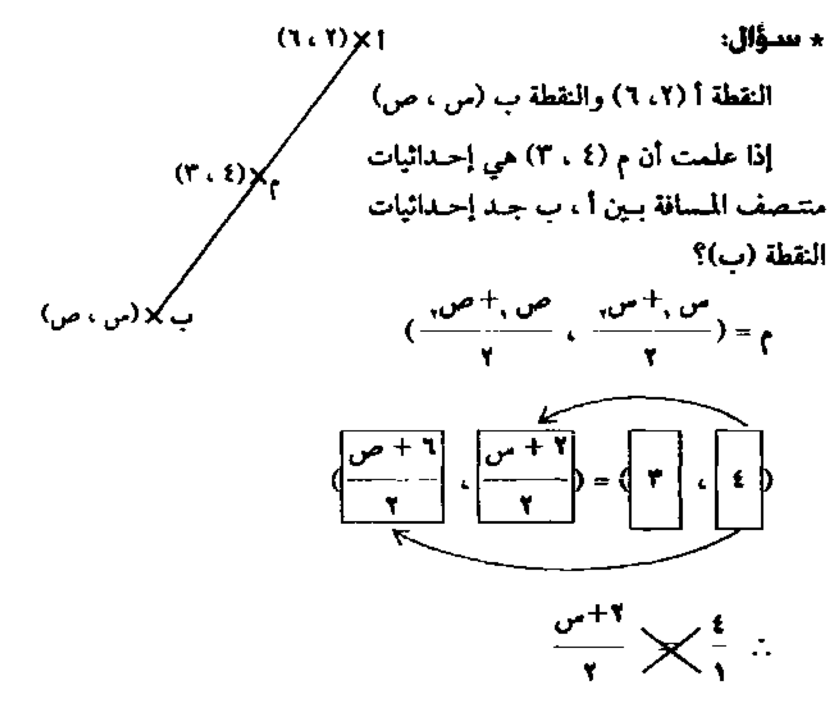
منتصف ب جـ = و = $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٨}{٢}\right)$

منتصف ب جـ = و = (١، ٤)

منتصف أ جـ = هـ = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

منتصف أ جـ = هـ = $\left(\frac{٢+٢}{٢} ، \frac{٦+٢}{٢}\right)$

منتصف أ جـ = هـ = $\left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢}\right)$ = (٢، ٤)



* سؤال:

النقطة أ (٢، ٦) والنقطة ب (س ، ص)

إذا علمت أن م (٤ ، ٣) هي إحداثيات منتصف المسافة بين أ ، ب جد إحداثيات النقطة (ب)؟

م = $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

$\left(٤ ، ٣\right) = \left(\frac{٢ + س}{٢} ، \frac{٦ + ص}{٢}\right)$

∴ $\frac{٤}{١} \times \frac{٢+س}{٢}$

٤ × ٢ = ٢ + س

٨ = ٢ + س

٨ − ٢ = س

٦ = س

$\frac{٣}{١} = \frac{٦+ص}{٢}$

٣ × ٢ = ٦ + ص

٦ = ٦ + ص

٦ − ٦ = ص

٠ = ص

∴ ب (٦، ٠)

(٤-٣) معادلة الخط المستقيم

هناك صورتين لمعادلات الخط المستقيم هي:

١. صورة الميل والمقطع الصادي للخط المستقيم:

ص = م س + جـ

حيث م: ميل الخط المستقيم

جـ: المقطع الصادي للخط المستقيم

٢. الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم

أ س + ب ص + جـ = صفر

* سؤال:

أي المعادلات التالية تمثل معادلة خط مستقيم

١. $\frac{٢}{٣}$س – ٥ص = ٤ ✓ نعم معادلة خطية بمتغيرين

لأن فيها س و ص

٢. ٤^{٢} + ٣س + ص= ٧ ✓ نعم معادلة خطية بمتغيرين

٣. س (٢س + ص) = ٦ ✗ ليست معادلة خطية

لأن فيها س × س = س^{٢}

٤. ٦ س + س = س^{٣} + ١ ✗ ليست معادلة خطية لوجود س^{٣}

٥. ٦ص – ١ = ٥ ✓ نعم معادلة خطية بمتغير واحد

* سؤال:

اكتب المعادلات التالية على صورة الميل والمقطع الصادي ثم على الصورة القياسية

١. ص – ٥س = ٦ ، م = ٥، جـ = ٦

* صورة الميل والمقطع الصادي ص = م س + جـ

ص = ٥س + ٦

* صورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر

ص – ٥س = ٦

ص – ٥س – ٦ = صفر

أ = – ٥ ، ب = ١ ، جـ = –٦

٢. ٦س = ٤ص

* صورة الميل والمقطع الصادي: ص = م س + جـ

ص = $\frac{٣}{٢}$س

م = $\frac{٣}{٢}$

جـ = ٠

* الصورة القياسية: أ س + ب ص + جـ = صفر

٦س = ٤ص

٦س − ٤ص = صفر

أ = ٦

ب = −٤

جـ = ٠

(٤-٤) ميل الخط المستقيم (م)

لإيجاد ميل الخط المستقيم إذا أعطيت المعادلة، لدينا حالتين:

١. إذا أعطيت المعادلة على صورة الميل والمقطع الصادي

ص = م س + جـ

يكون الميل م = معامل س

٢. إذا أعطيت المعادلة على الصورة القياسية

أ س + ب ص + جـ = صفر

يكون الميل م = $\frac{-أ}{ب}$

★ **سؤال:**

جد الميل في معادلات المستقيم التالية:

١) ص = −٦س + ١

م = −٦

٢) ٢ س + ص − ٤ = ٠ الصورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر

م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-٢}{١}$ = −٢

طريقة أخرى:

٢ س + ص − ٤ = صفر

ص = −٢س + ٤

م = −٢

٣) س = ص − ٥

صورة الميل والمقطع الصادي ص = س + ٥

م = ١

أو الصورة القياسية ص − س − ٥ = صفر

م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{--١}{١}$ = ١

٤) ٢ص − س = ٤

الصورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر

٢ص − س − ٤ = صفر

م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{--١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

٥) ٦ (٢س + ١) = ص

الصورة الميل والمقطع الصادي ص = م س + جـ

ص = ٦ × ٢س + ٦ × ١

ص = ١٢س + ٦

م = ١٢

٦) ٢ (٥ – ٢س) = ٤ (ص + ١)

٢ × ٥ – ٢ × ٢س = ٤ × ص + ٤ × ١

١٠ – ٤س = ٤ص +٤

١٠ – ٤ – ٤س – ٤ص = صفر

٦ – ٤س – ٤ص = صفر

على الصورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر

-٤س – ٤ص + ٦ = صفر

أ = -٤ ب = -٤ جـ = ٦

$$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{--٤}{-٤} = \frac{٤}{-٤} = -١$$

ملخص لكيفية إيجاد ميل الخط المستقيم

إذا أعطيت معادلة الخط المستقيم	إذا أعطي زوجين مرتبين يقعان على ($س_١$ ، $ص_١$) ($س_٢$ ، $ص_٢$)
⇐ نرتبها إما: ١. على صورة الميل والمقطع الصادي ص = م س + جـ الميل م = معامل (س) ٢. على الصورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر الميل م = $\frac{-أ}{ب}$	⇐ م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثال: جد ميل الخط المستقيم في الحالات التالية:

١) ٢س = ٤ص – ١

نرتبها على الصورة القياسية أ س + ب ص + جـ = صفر

٢ س = ٤ ص – ٣

٢س – ٤ص + ٣ = صفر

أ = ٢ ، ب = –٤، جـ = ٣

$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

طريقة أخرى:

نرتبها على صورة الميل والمقطع الصادي ص = م س + جـ

٢س = ٤ص – ٣

$\frac{٤}{٤}ص = \frac{٢}{٤}س + ٣$ $\qquad م = \frac{١}{٢}$

$ص = \frac{١}{٢}س + ٣$

٢) ٥ص – س = ٦

نرتبها على صورة الميل والمقطع الصادي أ س + ب ص + جـ = صفر

٥ص – س = ٦

٥ص = ٦ + س

$\frac{٥}{٥}ص = \frac{٦}{٥} + \frac{١}{٥}س$

$ص = \frac{٦}{٥} + \frac{١}{٥}س$

م = معامل س $\qquad$ م $= \frac{١}{٥}$

أو نرتبها على الصورة القياسية للتأكد بحل آخر

أس + ب ص + جـ = صفر

٥ص − س = ٦

٥ص − س − ٦ = صفر

أ = −١ $\quad$ ب = ٥ ، جـ = −٦

م $= \frac{-أ}{ب}$ $\qquad$ م $= \frac{--١}{٥} = \frac{١}{٥}$

٣. جد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين

جد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، −٢) $\quad$ (٦ ، ٠)

م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ٢}{٦ - -١} = \frac{-٢}{٧}$

* **سؤال:**

جد ميل الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويمر بالنقطة الأصل (٠ ، ٠)

م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ٢}{٠ - ١} = \frac{-٢}{-١} = \frac{٢}{١} = ٢$

ملاحظات:

إذا احتوت المعادلة على (س) فقط نستنتج أن

م = غير معرّف = $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

(المستقيم يوازي محور الصادات)

مثال: ٢س – ٣ = صفر

أ = ٢ ، ب = ٠ ، جـ = -٣

$$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٢}{٠} = \text{غير معرّف}$$

ملاحظة: إذا احتوت المعادلة على (ص) فقط، فإن م = صفر (المستقيم يوازي محور السينات)

مثال: ٤ص + ١ = ٠

أ = ٠ ، ب = ٤ ، جـ = ١

$$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٠}{٤} = \frac{٠}{٤} = \text{صفر}$$

(٤-٥) إيجاد معادلة الخط المستقيم

لإيجاد معادلة الخط المستقيم نطبق القانون التالي:

$ص - ص_١ = م \times (س - س_١)$

مثال: جد معادلة الخط المستقيم الذي ميلهُ م = -٤ ويمر بالنقط ($س_١$، $ص_١$) (-٢ ، ٥)

١. الخطوة الأولى:

نطبق القانون

$ص - ص_١ = م \times (س - س_١)$

ص – ٥ = -٤ × (س – -٢)

ص – ٥ = -٤ س – ٨

٢. الخطوة الثانية:

ثم نرتبها على صورة الميل والمقطع الصادي

ص = -٤ س - ٨ + ٥

ص = -٤ س - ٣

مثال: جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٦) (٢ ، ٥)

١. الخطوة الأولى: نجد الميل لأن الميل غير موجود

م = (ص٢ - ص١) / (س٢ - س١) = (٥ - ٦) / (٢ - ١) = -١ / ١ = -١

٢. الخطوة الثانية: نطبق القانون معادلة الخط المستقيم

ص - ص١ = م × (س - س١)

ص - ٦ = -١ × (س - ١)

ص ٦ = -س + ١

٣. الخطوة الثالثة: نرتبها على صورة الميل والمقطع الصادي

ص - ٦ = -س + ١

ص = -س + ١ + ٦

ص = -س + ٧

★ **سؤال:**

جد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محور السينات عندما س = ٣ ويقطع محور الصادات في ص = −١

$(\overset{س_1}{٣} ، \overset{ص_1}{٠})$ $(\overset{س_2}{٠} ، \overset{ص_2}{-١})$

١. الخطوة الأولى: نجد ميل الخط المستقيم

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{-١ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

٢. الخطوة الثانية: نطبق القانون معادلة الخط المستقيم

$$ص - ص_1 = م \times (س - س_1)$$

$$ص - ٠ = \frac{١}{٣} \times (س - ٣)$$

$$ص = \frac{١}{٣} س - ١$$

★ **سؤال:**

جد ميل المستقيم في الحالات التالية:

١) معادلة الخط المستقيم هي

$$٢ \times (س - ٣) = ٤ص + ١$$

الحل:

نرتب المعادلة على الصورة القياسية

٢ × (س − ٣) − ٤ص − ١ = صفر

٢س − ٦ − ٤ص − ١ = صفر

٢س − ٤ ص − ٧ = صفر

أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ −٧

$$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

٢) معادلة الخط المستقيم هي $\frac{س}{٣}$ = ص + ٢

الخطوة الأولى: نرتبها على الصورة الميل والقطع الصادي

ص = م س + جـ

$\frac{س}{٣}$ = ص + ٢

ص = $\frac{س}{٣}$ − ٢

م = $\frac{١}{٣}$

★ سؤال:

جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين:

$(س_١ ، ص_١) = (٠ ، ٢)$ ، $(س_٢ ، ص_٢) = (٢ ، ٦)$

١. الخطوة الأولى: نجد الميل لأن الميل غير موجود

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٢}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

٢. الخطوة الثانية: نطبق القانون:

ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٢ = ٢ × (س – ٠)

ص – ٢ = ٢س ص = ٢س + ٢

★ سؤال:

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٧ ، ١)

ومقطعه الصادي –٣

الخطوة الأولى: نجد الميل لأن الميل غير موجود

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - ١}{٠ - ٧} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$$

الخطوة الثانية: نطبق القانون

ص – ص١ = م × (س – س١)

$ص - ١ = \frac{٤}{٧} \times (س - ٧)$

$ص - ١ = \frac{٤}{٧} س - ٤$

$ص = \frac{٤}{٧} س - ٤ + ١$

$ص = \frac{٤}{٧} س - ٣$

(٤-١) حل نظام من المعادلات الخطية:

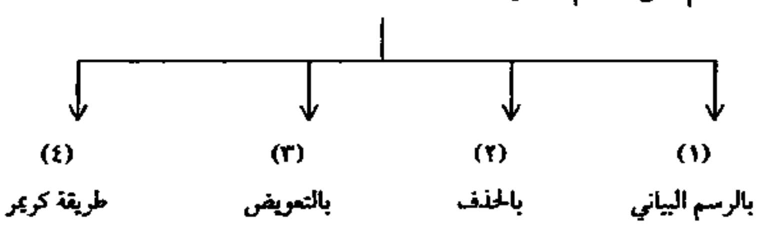
* حل: إيجاد قيم (س ، ص) التي تكون صحيحة في المعادلتين (تحقق المعادلتين)

* نظام: أي لدينا أكثر من معادلة خطية واحدة.

مثال:

$$\begin{bmatrix} \text{س} + \text{ص} = ٤ \\ ٢\text{س} + ٥\text{ص} = ١١ \end{bmatrix}$$ معادلة خطية فيها س و ص

يتم حل النظام بالطرق التالية:



حل نظام معطى بالحذف:

خطوات حل نظام من المعادلات الخطية بالحذف.

١. الخطوة الأولى: نرتب المعادلتين بحيث تكون (س) أولاً ثم (ص).

٢. الخطوة الثانية:

نختار (س) أو (ص) لحذفها

٣. الخطوة الثالثة:

نعوض قيمة ص التي أوجدناها في المعادلة

مثال:

حل النظام التالي:

س + ص = ٤

٢ س + ٥ص = ١١

−٢س − ٢ص = −٨

٢س + ٥ص = ١١

٣ص/٣ = ٣/٣ = −١

ص = ١

نعوض قيمة (ص) التي أوجدناها في المعادلة الأولى

س + ص = ٤

س + ١ = ٤

س = ٤ − ١

س = ٣

∴ الحل هو س = ٣ ، ص = ١

*** سؤال:**

جد حل النظام التالي:

٣ س − ٤ ص = −٥
٢س + ص = ٤

نضربها بعكس معامل (ص)

(٢س + ص = ٤) × ٤

نختار (س) أو (ص) لحذفها

أ. نختار (ص) مثلاً   ٣س − ٤ص = −٥
+
ب. نجمع المعادلتين   ٨س + ٤ص =١٦

$\frac{١١}{١١}$ س = $\frac{١١}{١١}$

س = ١

نعوض قيمة س = ١ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة (ص)

٢س + ص = ٤   ∴ الحل هو

٢ × ١ + ص = ٤   س = ١

٢ + ص = ٤   ص = ٢

ص = ٤ − ٢

ص = ٢

* سؤال:

إذا كان سعر جاكيت هو ضعفي سعر قميص وكان مجموع سعريهما يساوي (٢٧) دينار جد سعر الجاكيت وسعر القميص؟

* الحل:

سعر الجاكيت = س

سعر القميص = ص

س + ص = ٢٧ .... (١)

تكوّن معادلتين ←

س = ٢ص

س − ٢ص = ٠ .... (٢)

س − ٢ص = صفر

(س + ص = ٢٧) × ٢

---

١ س − ٢ ص = ٠

٢س + ٢ص = ٥٤

٣/٣ س = ٥٤/٣

∴ س = ١٨

نعوض قيمة س = ١٨ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة (ص)

١٨ + ص = ٢٧

ص = ٢٧ − ١٨

ص = ٩

∴ الحل هو س = ١٨، ص = ٩

★ سؤال:

حل النظام التالي

٢س + ٤ص = ٧

٣س − ٥ص = ١٠

الحل:

(٢س + ٤ص = ٧) × ٣

(٣س − ٥ص = ١٠) × −٢

٦س + ١٢ص = ٢١

−٦س + ١٠ص = −٢٠

$$\frac{٢٢}{٢٢}ص = \frac{١}{٢٢}$$

$$ص = \frac{١}{٢٢}$$

نعوض قيمة ص = $\frac{١}{٢٢}$ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة (س)

$$٢س + ٤ص = ٧$$

$$٢س + ٤ \times \frac{١}{٢٢} = ٧$$

$$٢س + \frac{٢}{١١} = ٧$$

$$٢س = ٧ - \frac{٢}{١١}$$

$$٢س = \frac{٧٥}{١١}$$

$$\Leftarrow س = \frac{٧٥}{٢٢}$$

(٤-٧) التوازي والتعامد

تعريف:

١) يكون المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$ إذا كان $م_١ = م_٢$

٢) يكون المستقيم $ل_١ \perp$ المستقيم $ل_٢$ إذا كان $م_١ \times م_٢ = -١$

مثال:

اثبت أن المستقيم

٢س + ص = ٥ يوازي المستقيم

٦س = ٨ − ٣ص

الحل:

$ل_١$: ٢س + ص − ٥ = ٠

$م_١$ = −٢

$ل_٢$: ٦س + ٣ص − ٨ = ٠

$م_٢ = \frac{-٦}{٣} = -٢$

بما أن $م_١ = م_٢$

∴ $ل_١ // ل_٢$

مثال:

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٤، ٥) ويعامد المستقيم المار بالنقطتين (−٣، ٠)، (−٤، ٥).

الحل:

نجد الميل للمستقيم الثاني ⇐ $م_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٥ - ٠}{-٤ + ٣} = -٥ \Leftarrow م_١ = \frac{١}{٥}$

∴ المعادلة ص − ٥ = $\frac{١}{٥}$ (س+٤)

ص − ٥ = $\frac{١}{٥}$س + $\frac{٤}{٥}$

ص = $\frac{١}{٥}$س + $\frac{٢٩}{٥}$

العلاقات بين خطين مستقيمين:

- متقاطعين
- متوازيين
- متعامدين
- متطابقين

*** سؤال: جد نقطة التقاطع (إن أمكن). في الحالات التالية:**

١. ل١: ٣س = ص−٥ ⟸ ص = ٥ + ٣س ....(٢)

ل٢ : س − ص = ٤ ⟸ ص = س − ٤ ....(١)

٣س + ٥ = س − ٤ ⟸ $\frac{٢}{٢}$س = $\frac{-٩}{٢}$

∴ س = $\frac{-٩}{٢}$ نعوض في معادلة رقم (١) لايجاد ص ⟸ ($\frac{-٩}{٢}$ ، $\frac{-١٧}{٢}$)

٢. ل١: س + ص = ٢

ل٢: ٢ص = −٢س + ٤

ل٢: ص = −س + ٢

∴ نقاط التقاطع

−س + ٢ = −س + ٢

−س + س = ٢−٢

صفر = صفر

∴ المستقيمين منطبقين

٣. ٨س + ٤ص = ١٢

ص − س = ٣

٤ص = −٨س + ١٢

ص = −٢س + ٣ .... (١)

الحل:

ص = ٣ + س................................ (٢)

∴ −٢س + ٣ = س + ٣

٣ − ٣ = س + ٢س

٠ = ٣س

س = ٠

نعوض في (٢) ص = ٠ + ٣ = ٣

∴ نقطة التقاطع (٠، ٣)

٤. س + ص = ٤ ← ص = −س + ٤

س + ص = ٨ ← ص = −س + ٨

−س + ٤ = −س + ٨

−س + س = ٨ − ٤

٠ = ٤ لا يتقاطعان

٢س + ص = ٥

ص = ٢

نعوض قيمة ص في المعادلة الأولى:

٥. ٢س+ ٢ = ٥

٢س = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$

∴ نقطة التقاطع ($\frac{٣}{٢}$، ٢)

* **سؤال:**

جد ميل الخط المستقيم المار بالنقطة (−١، ٢) ويمر بنقطة تقاطع الخطين

٤س + ٢ص = ١٢

ص = ٦س + ١

الحل:

نجد أولاً نقطة تقاطع الخطين

٢ص = −٤س + ١٢

ص = −٢س + ٦ .... (١)

ص = ٥س + ١ .... (٢)

−٢س + ٦ = ٥س + ١

٦ − ١ = ٥س + ٢س

٧س = ٥

س = $\frac{٥}{٧}$

نعوض في (٢):

ص = ٥ $\left(\frac{٥}{٧}\right)$ + ١

ص = $\frac{٢٥}{٧} + \frac{١ \times ٧}{١ \times ٧}$

ص = $\frac{٣٢}{٧}$

∴ نقطة التقاطع ($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٣٢}{٧}$)، (−١ ، ٢)

∴ م = $\frac{٢ - \frac{٣٢}{٧}}{-١ - \frac{٥}{٧}}$

م = $\frac{\frac{-١٨}{٧}}{\frac{-١٢}{٧}}$ = $\frac{٣}{٢}$

م = $\frac{-١٨}{٧} \div \frac{-١٢}{٧}$

م = $\frac{-١٨}{٧} \times \frac{٧}{١٢}$

م = $\frac{٣}{٢}$

★ سؤال:

$ل_1$: س + ٢ص = ٦

$ل_2$: ٤س + ٨ص = ٨

أثبت أن $ل_1$ // $ل_2$

$ل_1 \Leftarrow \frac{٢}{٢}ص = \frac{-س}{٢} + \frac{٦}{٢}$

ص = $\frac{-١}{٢}$س + ١ ⇐ $م_1 = \frac{-١}{٢}$

$ل_2 \Leftarrow \frac{٨}{٨}ص = \frac{-٤س}{٨} + \frac{٨}{٨}$

ص = $\frac{-١}{٢}$س + ١ ⇐ $م_2 = \frac{-١}{٢}$

∴ $م_1 = م_2$

∴ $ل_1$ // $ل_2$

★ سؤال:

إذا كان الخط المستقيم $ل_1$ يمر بالنقاط (١، ٣)، (-٤، ٥) وكان $ل_2$ يمر بالنقاط (٢، -١)، (٣، ٤)

هل $ل_1 \perp ل_2$ ، هل $ل_1$ // $ل_2$ ؟؟

$م_1 = \frac{٠ - ٣}{-٢ - ١} = ١$

$م_2 = \frac{٤ - (-١)}{٣ - ٢}$

∴ $ل_1$ لا يوازي $ل_2$ لأن $م_1 \neq م_2$

$ل_1$ لا يعامد $ل_2$ لأن $م_1 \times م_2 \neq -١$

★ **سؤال:**

جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (−١، ٤) ويوازي المستقيم $\text{ص} = \frac{-١}{٥}\text{س} + ٢$

الحل:

$\text{م}_٢ = \frac{-١}{٥}$

$\therefore \text{م}_١ = \frac{-١}{٥}$ (لأنهما متوازيين)

$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٥}(\text{س} + ١)$

$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٥} - \frac{١}{٥}$

$\text{ص} = \frac{-١}{٥}\text{س} - \frac{١}{٥} + ٤$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٥}\text{س} + \frac{١٩}{٥}}$$

★ **سؤال:**

جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٠، ٤) ويعامد المستقيم المار بالنقطتين (٠، ٣)، (٢، ٧)؟

$\text{م}_٢ = \frac{٧ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\text{م}_١ = \frac{-١}{٢}$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم $\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٢}(\text{س} - ٠)$

$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٢}\text{س}$

$$\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٢}\text{س} + ٤}$$

*** سؤال:**

جد المقطع السيني والصادي للخط المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٤) (٤، ١٠)

الحل:

نجد معادلة الخط المستقيم أولاً:

م = $\frac{١٠-٤}{٤-٢}$ = ٣

∴ المعادلة

ص - ٤ = ٣ (س - ٢)

ص - ٤ = ٣س - ٦

ص = ٣س - ٢

∴ المقطع الصادي (نعوض س = ٥) ⇐ ص = -٢ (٠، -٢)

المقطع السيني: (نعوض ص = ٥) ⇐ صفر = ٣س -٢

$\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٣}{٣}$س

س = $\frac{٢}{٣}$ ($\frac{٢}{٣}$، ٠)

تدريب:

جد معادلة الخط المستقيم في الحالات التالية:

١. يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٠، -٧).

٢. يمر بالنقطة (-١، ٣) وميله ٢.

٣. يمر بالنقطتين (٢، ٥) ويوازي المحور السيني.

٤. يمر بالنقطتين (-١، -٦) ويوازي المحور الصادي.

٥. يمر بالنقطتين (٤، -٢) ويعامد المستقيم ٢س + ص = ٣

(٤-٨) التمثيل البياني للخط المستقيم

* سؤال:

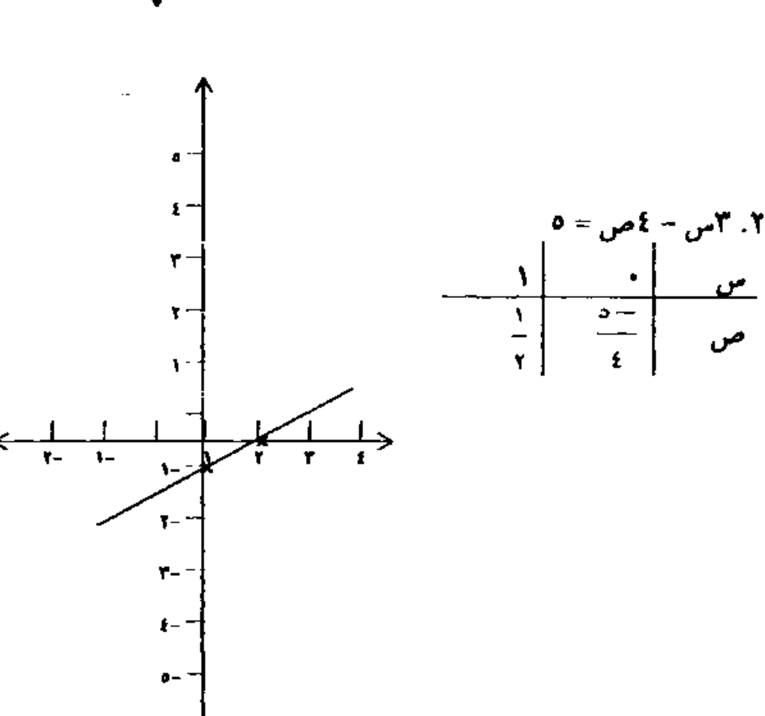
مثل بيانياً المعادلات التالية:

١. ص = ٢س + ١

س	٠	١	٢
ص	١	٣	٥

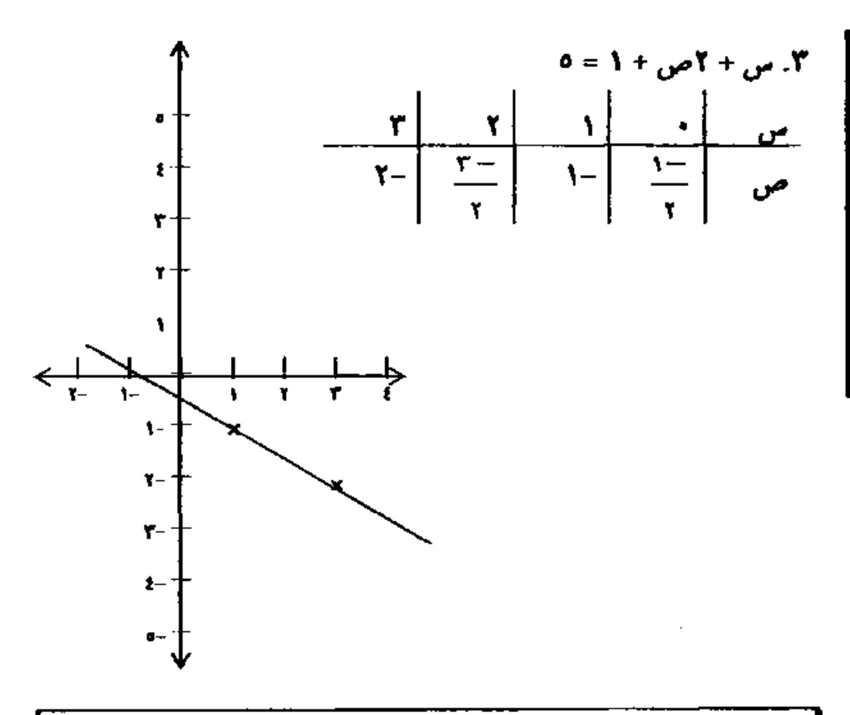
٢. ٣س - ٤ص = ٥

س	٠	١
ص	−٥/٤	١/٢



٣. س + ٢ص + ١ = ٥

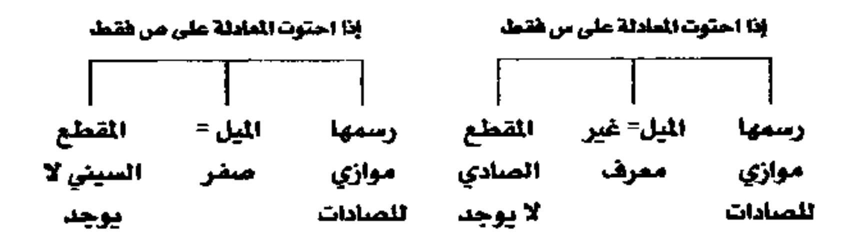
س	٠	١	٢	٣
ص	$\frac{-1}{2}$	١-	$\frac{-3}{2}$	٢-



ملاحظة:

١. إذا احتوت معادلة الخط المستقيم على س فقط يكون الخط عمودي (موازي لمحور الصادات).

٢. إذا احتوت معادلة الخط المستقيم على ص فقط يكون الخط الأفقي (موازي لمحور السينات).



أسئلة نهاية الوحدة الرابعة

*** السؤال الأول:**

احسب المسافة بين نقطة

الحل:

* $(\overset{س_١}{٢} ، \overset{ص_١}{٣})$ $(\overset{س_٢}{-١} ، \overset{ص_٢}{٥})$

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(-١ - ٢)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(-٣)^٢ + (٢)^٢}$$

$$ف = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$$

* $(\overset{س_١}{-١} ، \overset{ص_١}{٤})$ $(\overset{س_٢}{٣} ، \overset{ص_٢}{٥})$

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٥ - ٤)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(٤)^٢ + (١)^٢}$$

$$ف = \sqrt{١٦ + ١} = \sqrt{١٧}$$

* $(\overset{س_١}{٢} ، \overset{ص_١}{-٥})$ $(\overset{س_٢}{-٣} ، \overset{ص_٢}{-٤})$

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(٢ - -٣)^٢ + (-٤ - -٥)^٢}$$

$$ف = \sqrt{(٥)^٢ + (١)^٢}$$

$$ف = \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$$

⋆ السؤال الثاني:

إذا كانت النقطة أ (٢ ، -٣)

أي النقط التالية أقرب إلى (أ)

- ب (٢ ، -٥)
- جـ (٣ ، -١)
- د (٢ ، ٤)

الحل:

* أ (٢ ، −٣) ب (٢ ، −٥)

$$\text{ف أ ب} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٢ - ٢)^٢ + (-٥ - -٣)^٢}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{٠ + ٤} = \sqrt{٤} = ٢$$

* أ (٢ ، −٣) جـ (٣ ، −١)

$$\text{ف أ جـ} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\text{أ جـ} = \sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (-١ - -٣)^٢}$$

$$\text{أ جـ} = \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢}$$

$$\text{أ جـ} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$$

* أ (٢ ، −٣) ب (٢ ، ٤)

$$\text{ف أ د} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$\text{أ د} = \sqrt{(٢ - ٢)^٢ + (٤ - -٣)^٢}$$

$$\text{أ د} = \sqrt{(٠)^٢ + (٧)^٢}$$

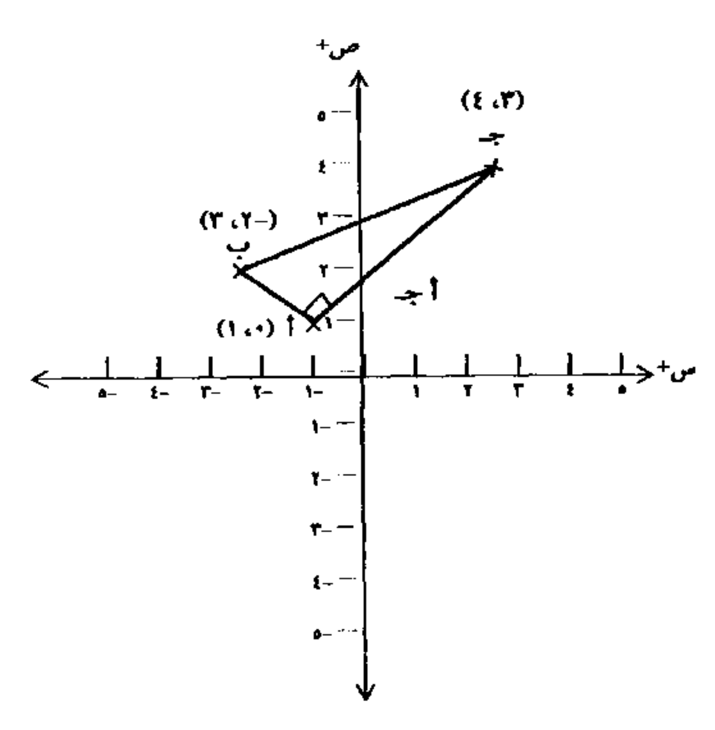
$$\text{أ د} = \sqrt{٠ + ٤٩} = \sqrt{٤٩} = ٧$$

∴ النقطة الأقرب إلى (أ) هي النقطة (ب).

* **السؤال الثالث:**

* أ($\overset{س}{٠}$ ، $\overset{ص}{١}$) ب ($\overset{س_١}{-٢}$ ، $\overset{ص_١}{٣}$) جـ($\overset{س_٢}{٣}$ ، $\overset{ص_٢}{٤}$)

ارسم النقاط على المستوى الديكارتي، ثم اثبت أن المثلث أ ب جـ هو مثلث قائم زاوية؟



الحل:

نجد أطوال أضلاع المثلث $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$

$\overline{أ ب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\overline{أ ب} = \sqrt{(-٢ - ٠)^٢ + (٣ - ١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(-٢)^{٢} + (٢)^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$

ب جـ = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{(٤ - ٣)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{(١)^{٢} + (٥)^{٢}}$

ب جـ = $\sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$

أ جـ = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢}\ (ص_{١} - ص_{١})^{٢}}$

أ جـ = $\sqrt{(٣ - ٠)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}}$

أ جـ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (٣)^{٢}}$

أ جـ = $\sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

حسب نظرية فيتاغورس

(الوتر)^{٢} = (الضلع الأول)^{٢} + (الضلع الثاني)^{٢}

$(\sqrt{٢٦})^{٢} = (\sqrt{٨})^{٢} + (\sqrt{١٨})^{٢}$

$٢٦ = ٨ + ١٨$

$٢٦ = ٢٦$ ∴ المثلث هو قائم زاوية

* **السؤال الرابع:**

اثبت أن النقط أ (١ ، ١)، ب (٥ ، ٢)، جـ (-١ ، -٢) لا تقع على استقامة

البرهان: نجد معادلة المستقيم $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٢ - ١}{٥ - ١} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} \times (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - ١ = \frac{١}{٤} \times (\text{س} - ١)$$

$$\text{ص} - ١ = \frac{١}{٤}\text{س} - \frac{١}{٤}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س} - \frac{١}{٤} + ١$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{٣}{٤}$$

نعوض ($\overset{\text{س}}{-١}$ ، $\overset{\text{ص}}{-٢}$) في المعادلة

$$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{٣}{٤}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤} \times -١ + \frac{٣}{٤}$$

$$\text{ص} = -\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}$$

$$\text{ص} = \frac{٢}{٤}$$

$$\text{ص} = \frac{٢}{٤} \neq -٢$$

∴ **(-١ ، -٢) لا تقع على نفس الاستقامة**

*** السؤال الخامس:**

جد إحداثيات منتصف المسافة بين النقطتين أ ($\overset{\text{س}_1}{\text{٣}}$ ، $\overset{\text{ص}_1}{\text{٤}}$) ($\overset{\text{س}_2}{\text{-٢}}$ ، $\overset{\text{ص}_2}{\text{٦}}$)

الحل:

منتصف المسافة = $\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{\text{٢}}\right)$

$= \left(\frac{\text{-٢+٣}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{٦+٤}}{\text{٢}}\right)$

$= \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{١٠}}{\text{٢}}\right)$

$= \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ ، } \text{٥}\right)$

*** السؤال السادس:**

إذا كانت أ (٢ ، ٢) هي رؤوس مثلث، ب (٠ ، ٢)، جـ (٢ ، ٦)

أ) جد إحداثيات نقاط منتصف الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.

ب) جد أطوال الأضلاع $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$.

الحل:

أ) إحداثيات منتصف $\overline{\text{أب}}$ = $\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{\text{٢}}\right)$

$= \left(\frac{\text{٢+٠}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{٢+٢}}{\text{٢}}\right)$

$= \left(\frac{\text{٢}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{٤}}{\text{٢}}\right)$

$= (\text{١} \text{ ، } \text{٢})$

* إحداثيات منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right)$

$$= \left(\frac{٠ + ٢}{٢} \text{ ، } \frac{٢ + ٦}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٢}{٢} \text{ ، } \frac{٨}{٢}\right)$$

$$= (١ \text{ ، } ٤)$$

* إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ ، } \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right)$

$$= \left(\frac{٢ + ٢}{٢} \text{ ، } \frac{٦ + ٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} \text{ ، } \frac{٨}{٢}\right)$$

$$= (٢ \text{ ، } ٤)$$

ب)

$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٢ - ٢)^2 + (٦ - ٢)^2}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٠)^2 + (٤)^2}$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{١٦}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{(٢ - ٠)^2 + (٦ - ٢)^2}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{(٢)^2 + (٤)^2}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$$

أجـ = √ (س٢ − س١)٢ (ص١ − ص١)٢

أجـ = √ (٢ − ٢)٢ + (٦ − ٢)٢

أجـ = √ (٠)٢ + (٤)٢

أجـ = √ ٠ + ١٦ = √ ١٦ = ٤

*** السؤال السابع:**

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٢) (−٥ ، ٦)

الحل:

نجد الميل أولاً

م = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (٦ − ⁻٢) / (−٥ − ٣) = ٨ / −٨ = −١

ص − ص١ = م × (س − س١)

ص − ⁻٢ = −١ × (س − ٣)

ص + ٢ = −١س + ٣ − ٢

ص = −١ س + ٣ − ٢

ص = −١س + ١

*** السؤال الثامن:**

جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٤) وميلهُ (−١/٢)

الحل:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م} \times (\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٢} \times (\text{س} - {}^{-}٢)$

$\text{ص} - ٤ = \frac{-١}{٢}\,\text{س} - ١$

$\text{ص} = \frac{-١}{٢}\,\text{س} - ١ + ٤$

$\text{ص} = \frac{-١}{٢}\,\text{س} + ٣$

*** السؤال التاسع:**

جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١، -٧) ويوازي محور السينات

الحل:

م = صفر

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م} \times (\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - {}^{-}٧ = \text{م} \times (\text{س} - ١)$

$\text{ص} + ٧ = ٠ \times (\text{س} - ١)$

$\text{ص} + ٧ = ٠$

$\text{ص} = -٧$

ص = م = صفر يوازي محور السينات

$\text{ص} = -٧$

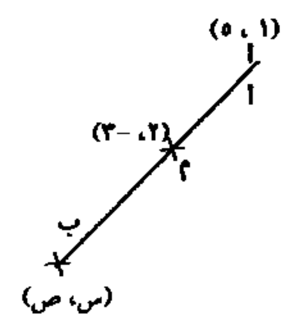
* **السؤال العاشر:**

جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (-٣، ١) يوازي محور الصادات

الحل:

س = -٣

* **السؤال الحادي عشر:**



القطع أ ب فيه أ (١ ، ٥) ب (س ، ص)

وكانت م (٢ ، -٣) هي منتصف أ ب جد إحداثيات ب؟

الحل:

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right) = (٢ ، -٣)$$

$$\left(\frac{١ + س}{٢} ، \frac{٥ + ص}{٢}\right) = (٢ ، -٣)$$

$$\frac{١ + س}{٢} \times \frac{٢}{١}$$

⇐ ١ + س = ٤ ⇐ س = ٤ - ١ ⇐ س = ٣

$$\frac{٥ + ص}{٢} \times \frac{-٣}{١}$$

⇐ ٥ + ص = -٦ ⇐ ص = -٦ - ٥ ⇐ ص = -١١

∴ (٣ ، -١١)

* **السؤال الثاني عشر:**

جد معادلة الخط المستقيم بالنقطة (-٣ ، ١) ويوازي محور الصادات.

الحل:

س = -٣

* **السؤال الثالث عشر:**

جد ميل المستقيم الذي معادلتهُ

٣س + ٢ص = ٧

الحل:

$م = \frac{-أ}{ب} = \frac{-٣}{٢}$

السؤال الرابع عشر:

لديك النظام

٢س + ص = ٥

س + ص = ٣

أ) هل النقطة (٢ ، ٤) هي حل لهذه النظام أم لا؟

٢ × ٢ + ٤ ≠ ∴ ليس حل

ب) هل النقطة (٠ ، ٥) هي حل نظام؟

٢ × ٠ + ٥ = ٥ ✓

٠ + ٥ ≠ ٣ ✗

∴ ليست حل

جـ) (٢ ، ١) (س ، ص)

٢ × ٢ + ١ = ٥

٢ + ١ = ٣

∴ هي الحل

السؤال الخامس عشر: حل النظام

٢ س + ص = ٥

س + ٣ ص = ١٠

الحل:

(٢ س + ص = ٥) × -٣

⇐ -٦ س - ٣ ص = -١٥

س + ٣ ص = ١٠

-٦ س - ٣ ص = -١٥

-٥ س / -٥ = -٥ / -٥

∴ س = ١

٢ × ١ + ص = ٥

٢ + ص = ٥ - ٢

∴ ص = ٣

السؤال السادس عشر:

إذا كان ميل المستقيم أ ب يساوي (٢) حيث أ (-٣، ٢)، ب (١، ل)، جد ل؟

الحل:

ميل أ ب = ٢ حيث أ (-٣ ، ٢) ب(١ ، ل)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ل - ٢}{١ - -٣} = \frac{ل - ٢}{٤}$$

$$\frac{٢}{١} \times \frac{ل - ٢}{٤}$$

ل - ٢ = ٢ × ٤

ل - ٢ = ٨

ل = ٨ - ٢

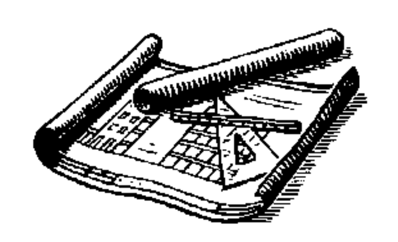
ل = ١٠

السؤال السابع عشر:

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١، ٣)، ويعامد المستقيم الذي معادلته ٢س+٤ص =٦

الوحدة الخامسة

الهندسة التحويلية (التحويلات الهندسية)



الوحدة الخامسة

الهندسة التحويلية (التحويلات الهندسية)

سندرس في هذه الوحدة سلوك النقاط (س ، ص) عند تغيير موقعها من مكان للآخر وذلك لسبب تعرضها لتحويل هندسي

مثل: الانعكاس، الدوران، الانسحاب، التماثل وغيرها.

(٥-١) الانعكاس (Refection)

إن مشاهدة صور الأجسام في المرايا هو من الأنشطة التي تحدث يومياً في الحياة، وتسمى انعكاساً، وفي الرياضيات يكون انعكاس النقطة (أ) في محور ما هو النقطة (أ/) حيث أن المسافة بين (أ) ومحور الانعكاس يساوي المسافة بين (أ/) ومحور الانعكاس.

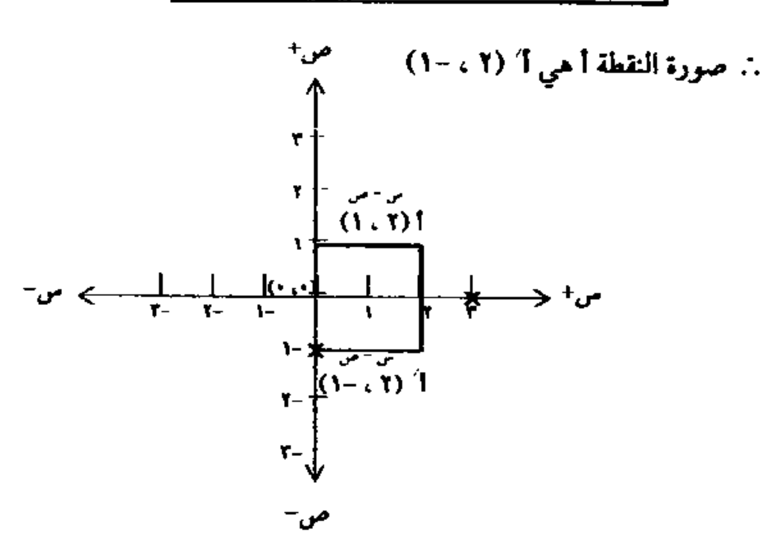
مثال توضيحي: الانعكاس في المحور السيني

(١) لدينا نقطة أ (٢ ، ١) تأثرت هذهِ النقطة بإنعكاس حول محور السينات

قاعدة:

أ (س ، ص) $\xrightarrow[\text{محور السينات}]{\text{انعكاس حول}}$ أَ (س ، −ص)

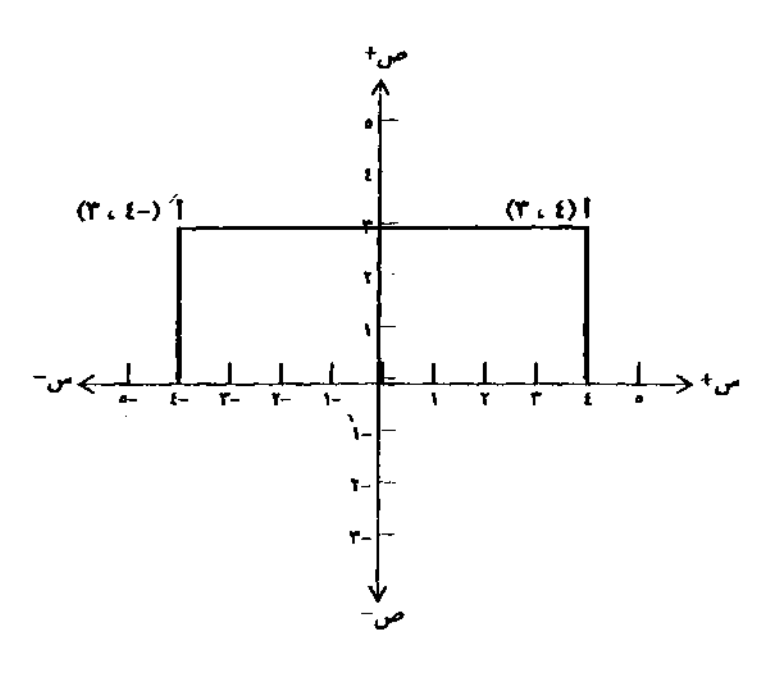
∴ صورة النقطة أ هي أَ (٢ ، −١)



الانعكاس في المحور الصادي

مثال توضيحي: النقطة أ (٤ ، ٣)

تأثرت بالإنعكاس حول محور الصادات

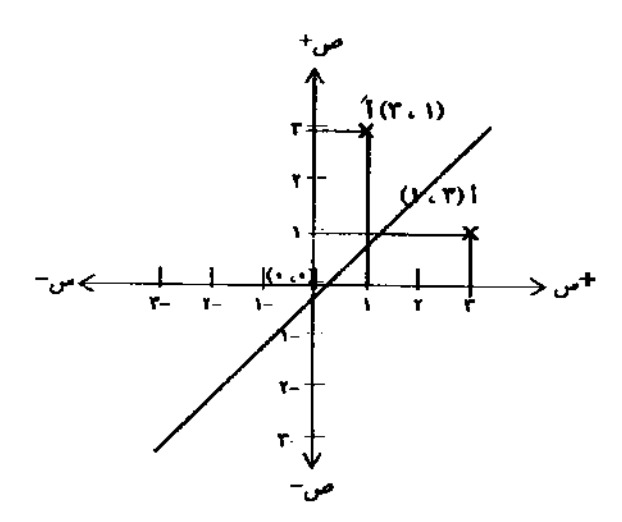


قاعدة:
أ (س ، ص) $\xleftarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس حول}}$ أَ (−س ، ص)

الانعكاس في المستقيم ص = س

مثال:

انعكـــــاس
النقطة (أ) (٣ ، ١)
فأن أَ (٣ ، ١)



قاعدة:

أ (س ، ص) $\xrightarrow[\text{ص = س}]{\text{انعكاس حول}}$ أَ (ص، س)

مثال:

جد صورة النقاط التالية بالإنعكاس حول المستقيم ص = س

(١) أ (٤ ، ٢) أَ (٢ ، ٤)

(٢) أ (−٤ ، −١) أَ (−١ ، −٤)

(٣) أ (٥، −١) أَ (−١ ، ٥)

☐ مثال:

جد صورة النقاط التالية بالإنعكاس الموضح في كل حالة

(١) أ (-٤ ، -١) $\xrightarrow[\text{محور السينات}]{\text{انعكاس حول}}$ أ′ (-٤ ، ١)

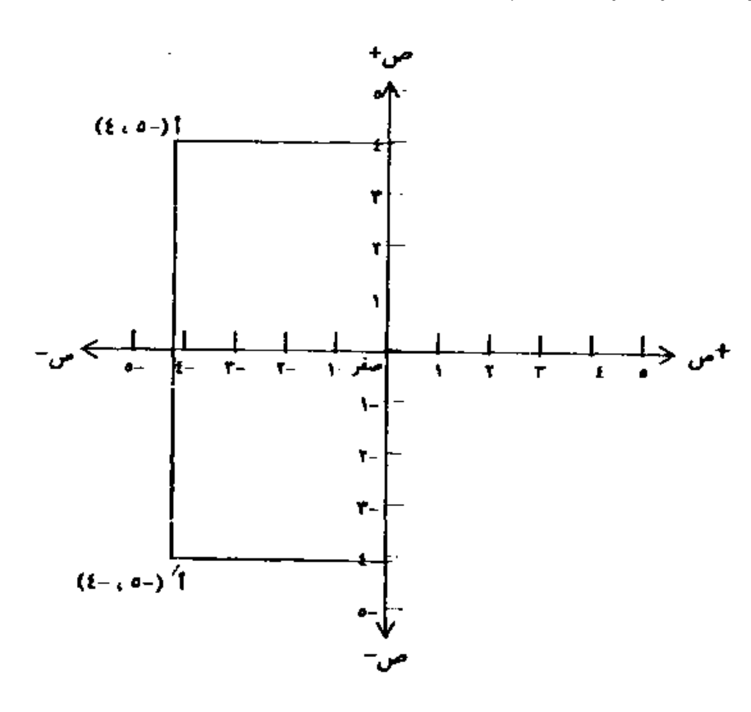
(٢) أ (-٤ ، -١) $\xrightarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس حول}}$ أ′ (٤ ، -١)

(٣) أ (-٤ ، -١) $\xrightarrow[\text{ص = س}]{\text{انعكاس حول}}$ أ′ (-١ ، -٤)

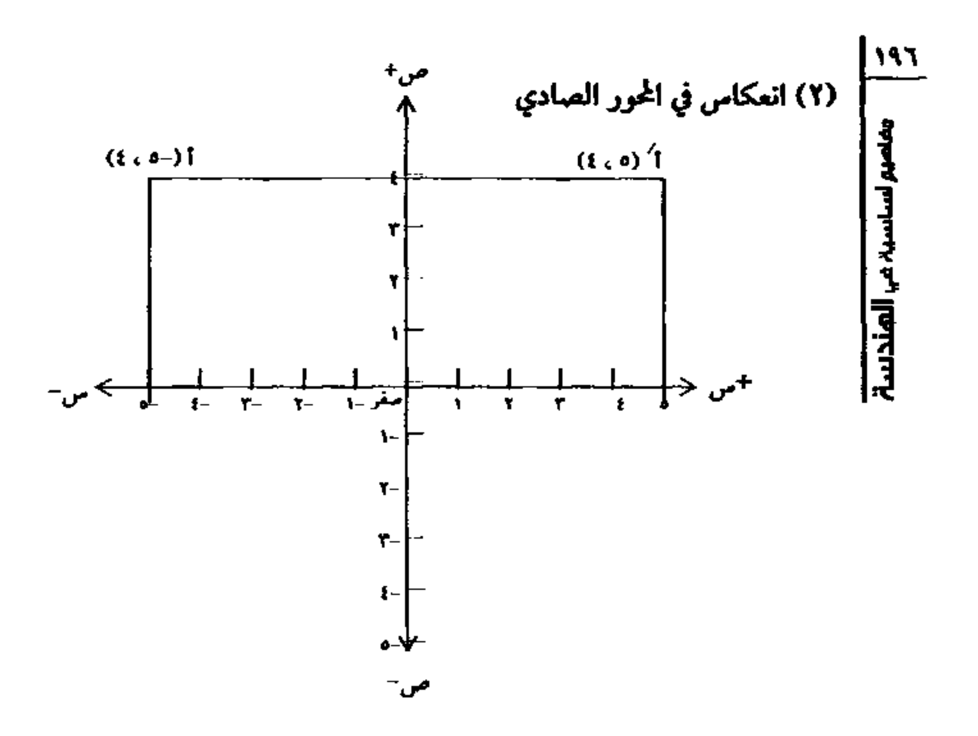
☐ **مثال: أوجد صورة النقطة (-٥ ، ٤) الآتية تحت تأثير:**

(١) انعكاس في المحور السيني

أ (-٥ ، ٤) أ′ (-٥ ، -٤)



(٢) انعكاس في المحور الصادي



(٣) انعكاس في المستقيم ص = س

أ' (٤، -٥)

مثال: النقاط أ، ب، جـ تمثل مثلث

حيث أ (٢ ، -١)

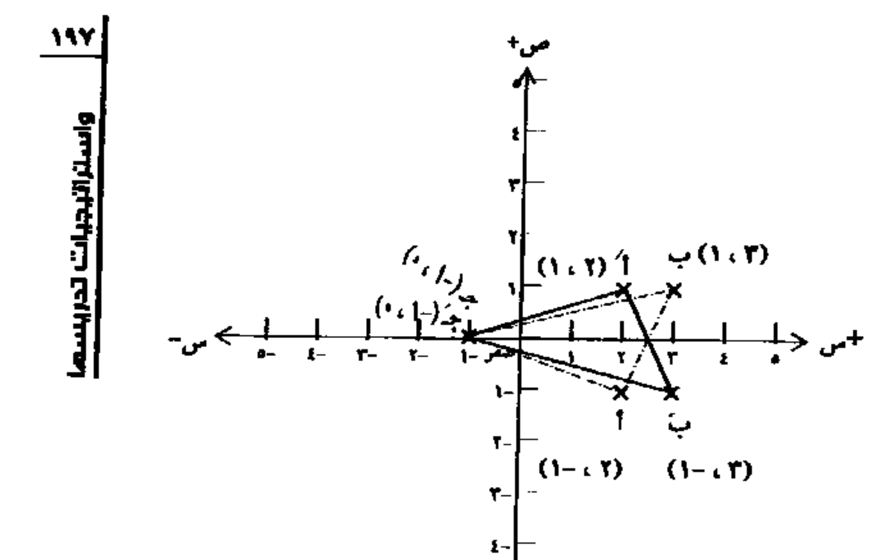
ب (٣ ، ١)

جـ (-١ ، ٠)

المطلوب:

ارسم المثلث أ ب جـ.

ثم ارسم المثلث أ' ب' جـ' الذي يمثل انعكاس حول محور السينات.



خصائص الانعكاس:

(١) يحافظ على استقامة واحدة.

(٢) يحافظ على قياس الزوايا.

(٣) يحافظ على التوازي.

(٤) يحافظ على قياس الأطوال.

(٥) يحافظ على البنية.

(٥-٢) الإنسحاب

هذا المفهوم الرياضي يعني ببساطة نقل الشكل أو النقطة من موقع إلى آخر مع المحافظة على أبعاده دون تغيير ويمكن أن يتحرك الشكل إلى اليمين أو اليسار أو إلى أعلى أو أسفل أو في أي اتجاه على السطح المستوي.

مثال:

ص+

انسحاب للأعلى بمقدار ٣ وحدات
(س، ص + جـ)
(١، ٤ + ٣)
(١ ، ٧)

انسحاب نحو اليمين بمقدار ٣ وحدات
(س + جـ ، ص)
(١ + ٣ ، ٤)
(٤ ، ٤)

انسحاب نحو اليسار بمقدار ٣ وحدات
(س − جـ ، ص)
(١ − ٣ ، ٤)
(-٢ ، ٤)

أ (١ ، ٤)

انسحاب نحو الأسفل بمقدار ٣ وحدات
(س ، ص − جـ)
(١ ، ٤ − ٣)
(١ ، ١)

مثال:

النقطة أ (٤ ، ٥)

ب (٠ ، ٤)

جـ (١ ، ٠)

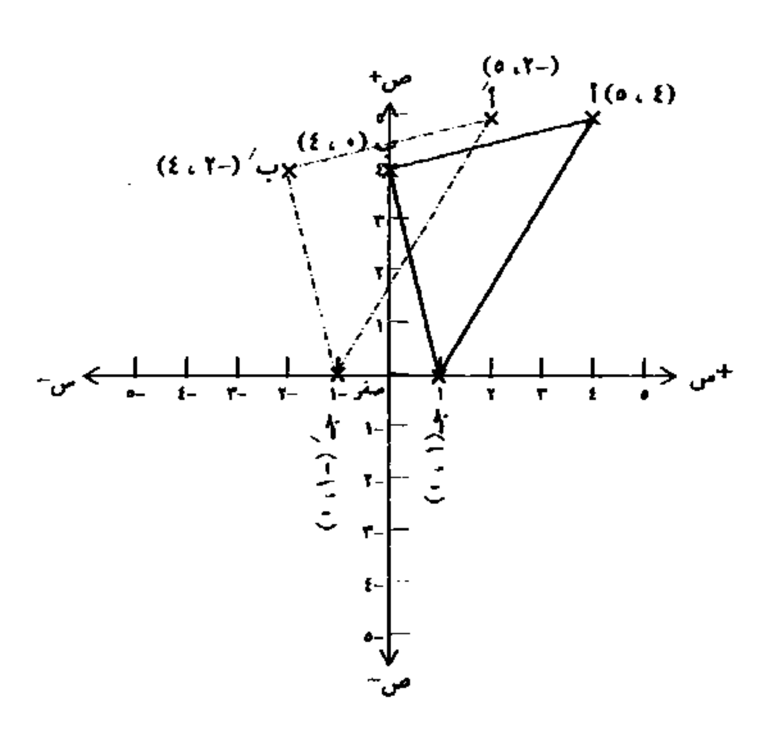
تمثل رؤوس مثلث جد ما يلي:

(١) انسحاب المثلث لليسار بمقدار وحدتين (٢).

(٢) انعكاس المثلث حول محور الصادات ثم انسحابهُ للأسفل بمقدار ٣ وحدات.

١.انسحاب المثلث لليسار بمقدار وحدتين

نطبق (س − جـ ، ص)		(س − جـ ، ص)
		(٤ − ٢، ٥)
أ (٤ ، ٥)	←	أَ (٢ ، ٥)
		(٠ − ٢، ٤)
ب (٠ ، ٤)	←	بَ (-٢ ، ٤)
		(١ − ٢، ٠)
جـ (١ ، ٠)	←	جـَ (-١ ، ٠)

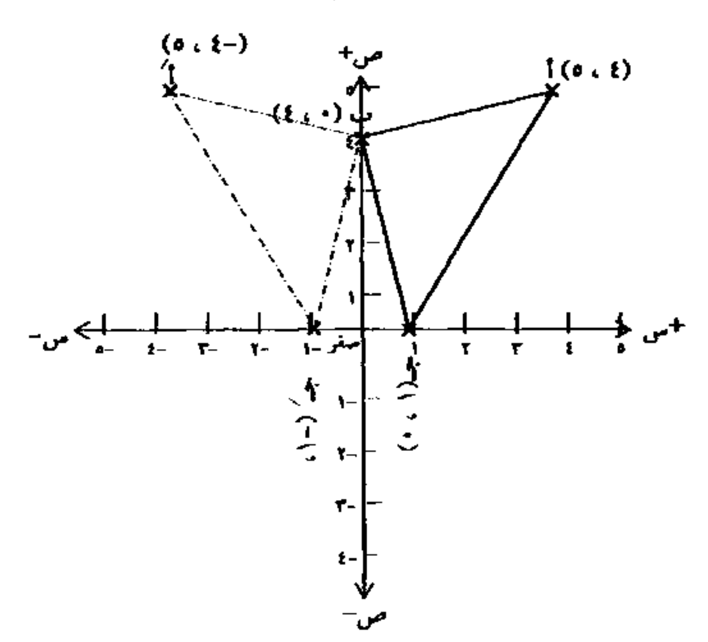


٢. انعكاس المثلث حول محور الصادات ثم انسحابه للأسفل ٣ وحدات

الحل:

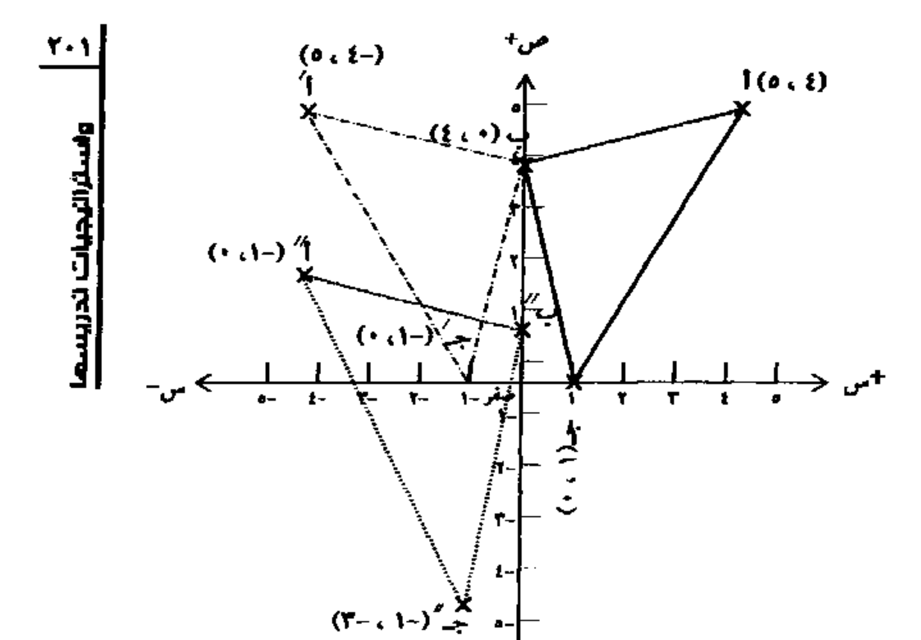
أولاً: انعكاس المثلث حول محور الصادات

أ (٤ ، ٥)	أ/ (-٤ ، ٥)
ب (٠ ، ٤)	ب/ (٠ ، ٤) (تبقى الصفر كما هي)
جـ (١ ، ٠)	جـ/ (-١ ، ٠)



ثم انسحابهُ للأسفل بمقدار ٣ وحدات

(س ، ص - جـ)	(س ، ص - جـ)
	٥ - ٣
أ/ (-٤ ، ٥)	أ// (-٤ ، ٢)
	٤ - ٣
ب/ (٠ ، ٤)	ب// (٠ ، ١)
	٠ - ٣
جـ/ (-١ ، ٠)	جـ// (-١ ، -٣)



* سؤال:

(١) ارسم المستقيم أ ب حيث

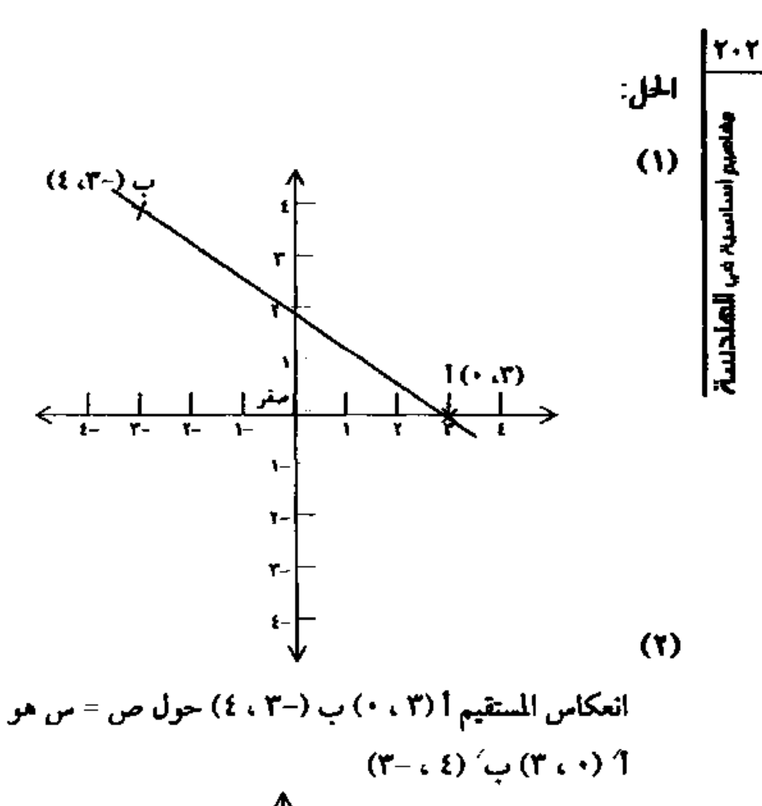
أ (٣ ، ٠)، ب (−٣ ، ٤)

(٢) ارسم انعكاس المستقيم حول ص = س

(٣) ارسم انسحاب المستقيم لليمين بمقدار وحدتين

الحل:

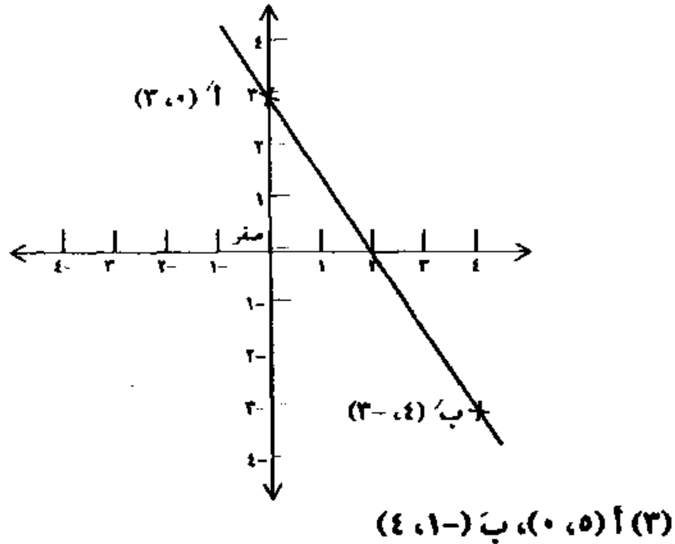
(١)



(٢)

انعكاس المستقيم أ (٣ ، ٠) ب (-٣ ، ٤) حول ص = س هو

أَ (٠ ، ٣) بَ (٤ ، -٣)



(٣) أ (٥، ٠)، بَ (-١، ٤)

خصائص الانسحاب:

(١) يحافظ على الاستقامة.

(٢) يحافظ على الأطوال.

(٣) يحافظ على قياس الزوايا.

(٤) يحافظ على التوازي.

(٥) يحافظ على البنية.

ملخص

أولاً: الانعكاس

١. (س ، ص) $\xrightarrow[\text{محور السينات}]{\text{انعكاس حول}}$ (س ، –ص)

٢. (س ، ص) $\xrightarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس حول}}$ (–س ، ص)

٣. (س ، ص) $\xrightarrow[\text{ص = س}]{\text{انعكاس حول}}$ (ص ، س)

ثانياً: الانسحاب:

(٥-٣) التناظر (التماثل) (Symmetry)

مقدمة:

التناظر خاصية يمكن وصف العديد من الأجسام والأشياء بها، فالإنسان متناظر (متماثل) فله يدان ورجلان وعينان وباختصار هنالك خط وهمي يقسم الجسم إلى قسمين متماثلين، النصف اليميني للجسم يماثل تماماً النصف اليساري له.

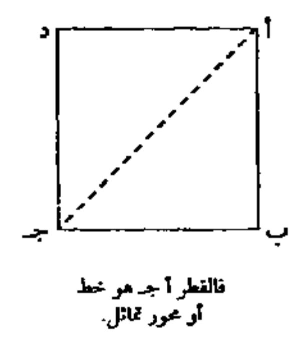
إن مفهوم التماثل يدخل في العديد من المجالات الحياتية والعملية ونحن في معالجتنا هذه سندرس فقط التماثل الرياضي مركزين على أساسياته البسيطة المناسبة لطلبة الصفوف من الثامن إلى العاشر.

> **ملاحظة: سنستخدم مصطلحي تماثل وتناظر فيما يلي باعتبارهما مترادفين. ويمكن ان نكتب الواحد منهما بدلاً عن الآخر.**

التماثل الرياضي Math Symmetry:

مثال (١):

في المربع أ ب جـ د، القطر أ جـ يقسمه إلى مثلثين متطابقين تماماً (متساويان في كل شيء)، ويتضح ذلك إذا طويناه على هذا القطر.

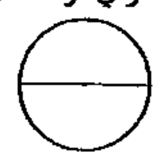
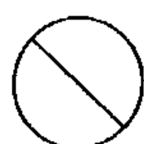
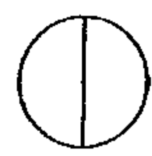
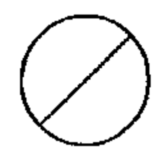


فالقطر أ جـ هو خط أو محور تماثل.

مثال (٢):

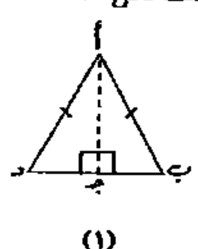
الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل هي أقطارها حيث أن أي قطر فيها يقسمها إلى قسمين متطابقين.

انظر الأشكال التالية ولاحظ أننا لو طوينا كل دائرة حول القطر المرسوم لانطبق كل نصف منها على النصف الآخر تماماً. إن كل نصف منها هو صورة الآخر في مرآة مستوية.

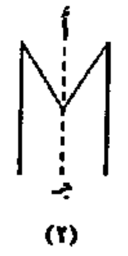





تدريب:

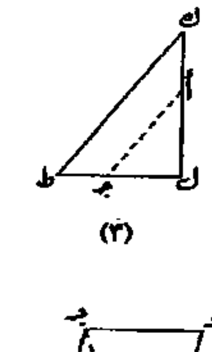
في الأشكال التالية هل الخط أ جـ في كل منها يمثل محور تماثل أم لا فسر إجابتك لكل حالة.



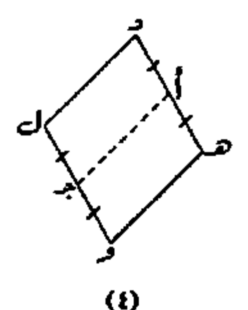
(١)



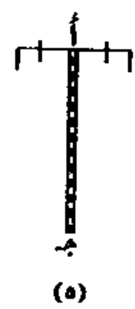
(٢)



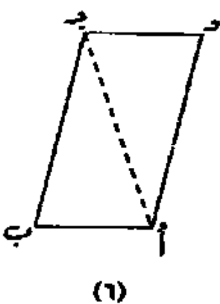
(٣)



(٤)



(٥)



(٦)

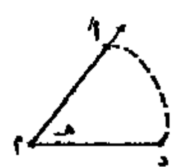
التناظر (التماثل) الانعكاسي Reflection Symmetry

نسمى النوع الذي درسناه أعلاه من التماثل باسم التماثل الانعكاسى أو التماثل المحوري ويكون الشكل الهندسى متماثلاً انعكاسياً إذا وجد فيه خط يقسمه إلى قسمين متطابقين وكل واحد منهما صورة الآخر في مرآة مستوية.

(٥-٤) الدوران:

هو تحريك الشكل الهندسي حول نقطة ثابتة بزاوية معينة في اتجاه معين.

أي أن: الدوران الذي مركزه م وقياس زاويته هـ يحول النقطة م إلى نفسها ويحول أي نقطة أخرى في المستوى إلى نقطة أ/ في نفس المستوى بحيث:



(١) م أ = م أ/ (٢) ق (∢ أ م أ/) = هـ

ملاحظات:

١- الدوران يكون موجباً إذا كان عكس عقارب الساعة.

٢- الدوران يكون سالباً إذا كان مع عقارب الساعة.

٣- الدوران بزاوية قياسها ١٨٠، - ١٨٠ يسمى دوران نصف دورة.

٤- الدوران بزاوية قياسها ٣٦٠، -٣٦٠ يسمى بالدوران المحايد. (لأنه يعيد الشكل إلى وضعه الأصلي).

◆ حالات الدوران حول نقطة الأصل في المستوى الإحداثي:

١. الدوران بزاوية ٩٠°: (نقلب ونعكس إشارة الأول)

صورة النقطة (س، ص) ⟵ النقطة (-ص، س)
(بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠°)

٢. الدوران بزاوية -٩٠°: (نقلب ونعكس إشارة الثاني)

صورة النقطة (س، ص) ⟵ النقطة (ص، -س)
(بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها -٩٠°)

٣. الدوران بزاوية –١٨٠°: (عكس إشارة الأول والثاني فقط)

بالدوران حول نقطة الأصل

صورة النقطة (س، ص) ⟵ النقطة (–س، –ص)

بزاوية قياسها –١٨٠°

٤. الدوران بزاوية –٣٦٠°: (هي نفس النقطة)

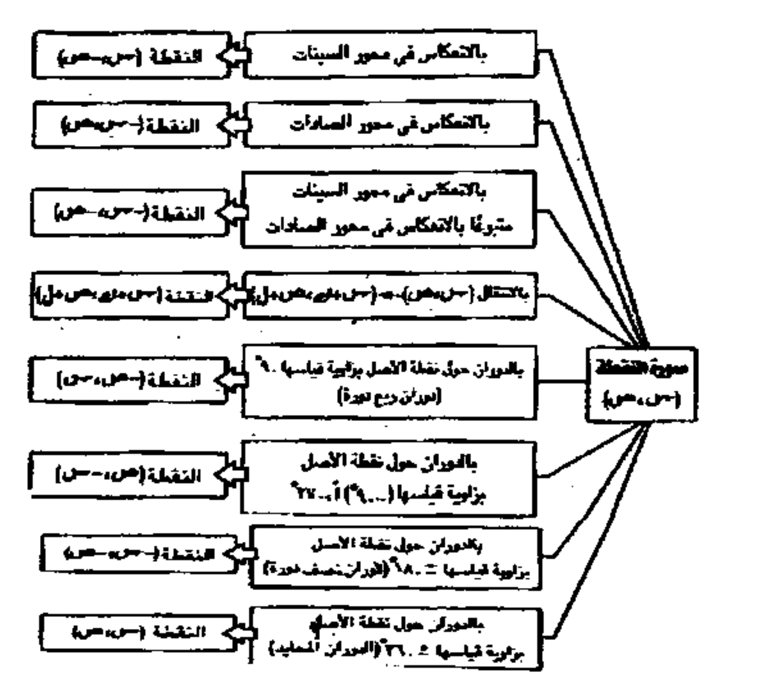
بالدوران حول نقطة الأصل

صورة النقطة (س، ص) ⟵ النقطة (س، ص)

بزاوية قياسها –٣٦٠°

(٥–٥) ملخص للتحويلات الهندسية

ملخص للتحويلات الهندسية (الانعكاس، الانتقال، الدوران) في المستوى الإحداثي



تمارين على الدوران:

أكمل ما يأتي:

١. صورة النقطة(٢، -٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي........... وبزاوية قياسها ١٨٠° هي...........

٢. صورة النقطة(-١، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي........... وبزاوية قياسها ٣٦٠° هي...........

٣. النقطة (٣، -٢) هي صورة النقطة (٢، ٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها...........

٤. صورة النقطة........... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي (-١، ٤).

٥. صورة النقطة........... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠° هي (٥، -٢).

٦. صورة النقطة (-٣، ٧) بالدوران ٩٠° حول نقطة الأصل متبوعاً بانعكاس في محور الصادات هي...........

٧. صورة النقطة (-٢، ٠) بالانتقال: (س، ص) ← (س+٣، ص-١) متبوعاً بدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي...........

٨. الدوران بزاوية قياسها ٩٠° حول نقطة الأصل يرسم نقطة (س، -ص) إلى النقطة...........

اجب عن الآتي:

س ص ع ك شكل رباعي فيه س (-٦، ٥)، ص (-٢، ١)، ع(٤، ١)، ك(٣، ٥) ارسم على المستوى الإحداثي الشكل الرباعي وصورته بالدوران حول نقطة الأصل حيث:

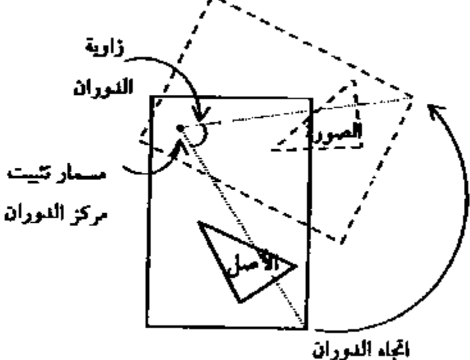
أ) (س، ص) ← (-ص، س).

ب) دوران حول نقطة الأصل بزاوية ١٨٠.

(٥-٦) أنشطة على التحويلات الهندسية

◆ الدوران:

- ارسم على ورقة A4 مثلث أو أي شكل.
- ضع ورقة شفافة (شفافية) وشف الشكل المرسوم (ارسم الشكل).
- دور الورقة الشفافة وبذلك يدور الشكل المرسوم ويمكن استخدام ورقتين شفافتين مع جهاز العارض فوق الرأس.
- يمكن استخدام مسمار للتثبيت لكي لا يتحرك نقطة الدوران أو أن ترسم نقطة الدوران وتشفها ايضا مع الرسمة.



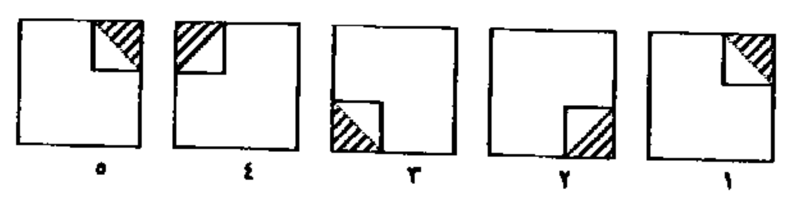
- وبعد ذلك يمكن تحديد إتجاه الدوران ومركز الدوران وزاوية الدوران.
- يمكن استنتاج جميع خواص الدوران بهذه الكيفية.

- يمكن عمل أنماط كثيرة بسهولة كما يلي.

هذه ٥ خطوات لنمط معين.

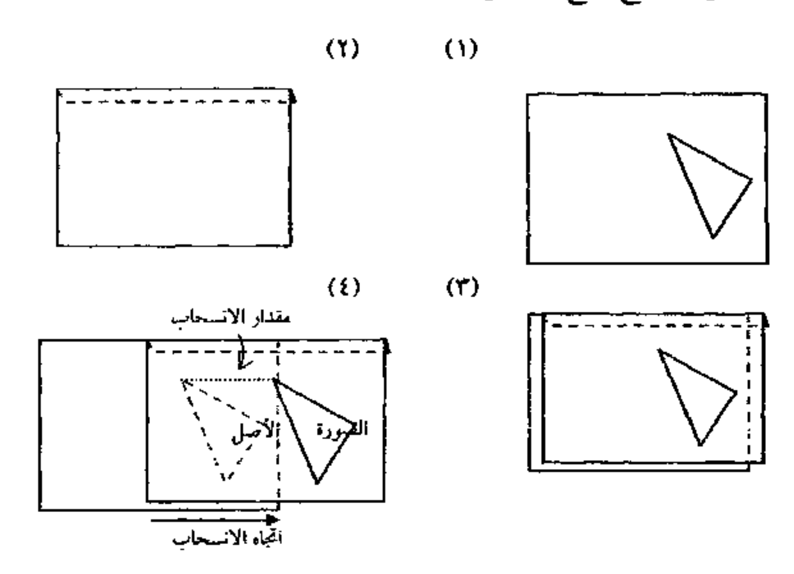
كيف يمكن تحديد الخطوة ١٠١ ؟

اذكر قاعدة النمط ؟



الانسحاب:

- ارسم على ورقة A4. مثلث أو أي شكل.
- ضع ورقة شفافة أو نصف شفافة واطويها كما في الشكل (٢).
- شف الشكل المرسوم (ارسم الشكل).
- اسحب الورقة النصف الشفافة بالاتجاه المراد سحب الشكل مع مراعاة أن تكون طرف الورقة ملاصقاً للطرف المطوي من الورقة.
- وبعد ذلك يمكن تحديد إتجاه الانسحاب ومقدار الإنسحاب.
- يمكن استنتاج جميع خواص الانسحاب بهذه الكيفية.



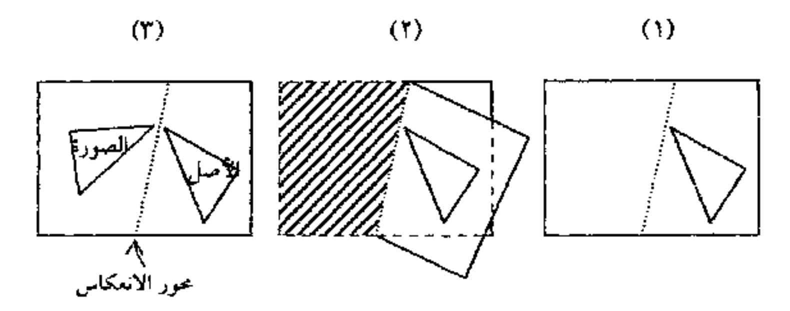
الأشكال الزخرفية:

- أقطع ورقة مربعة من A4. وارسم شكل مثلث على أحد أضلاعها.
- اقطع المثلث واسحبه بمقدار طول ضلع المربع كما في الشكل.
- ارسم الشكل الناتج على ورقة مقوى واقطع الشكل.
- استخدم القطعة المصنوعة من ورق المقوى في رسم شكل زخرفي كما في الشكل.



الانعكاس:

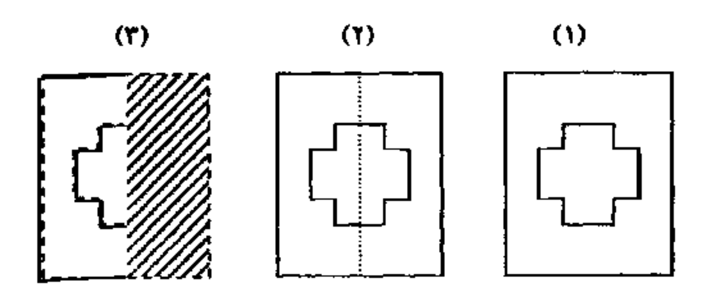
- ارسم على ورقة A4 مثلث أو أي شكل باستخدام قلم رصاص.
- كرر الرسم على الشكل حتى يصبح "مادة كربون القلم أكثر على الورقة".
- اطوي الورقة على المحور الذي تريد أن تعكس الشكل عليه.
- إدعك بقطة محارم ورق مع الضغط على الورقة المطوية ليطبع الشكل المراد ايجاد صورته على الورقة.
- افرد الورقة سوف تجد صورة مطبوعة للشكل الأصلي.
- يمكن استنتاج جميع خواص الانعكاس بهذه الكيفية.



الأشكال المتناظرة:

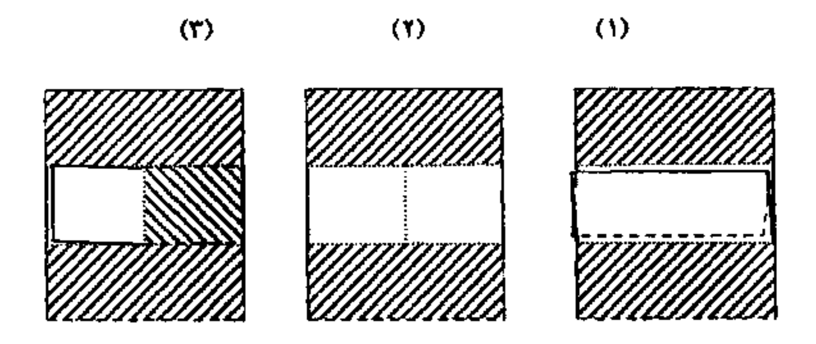
- ارسم على ورقة A4 الشكل المراد دراسة تناظرة ومعرفة عدد محاور التناظر للشكل.
- حدد أي مستقيم وتأكد من أنه محور تناظر وذلك بطي الورقة على المحور والتأكد من تطابق الجزئين للشكل.

- استخدم ورقة نصف شفافة وذلك لكي يسهل عليك مطابقة الجزيئن أو قرب الورقة المطوية من مصدر إنارة (شاشة جهاز حاسوب) وارفعها في الهواء مقابل مصدر الإنارة.



تطبيقات على التحويلات الهندسية:

- أطوي ورقة A4 إلى ثلاثة أقسام كما في الشكل (١).
- أطوي الورقة المطوية إلى نصفين كما في الشكل (٣).
- ارسم على الورقة المطوية شكل رباعي كما في الشكل (٤).
- أقطع الشكل المرسوم باستخدام مقص أو قاطع.
- افرد الورقة وحاول أن تذكر أي التحويلات الهندسة تجعل صورة الشكل رقم (١) هو الشكل رقم (٢) و الشكل رقم (٣) و هكذا حتى الشكل رقم (٦).



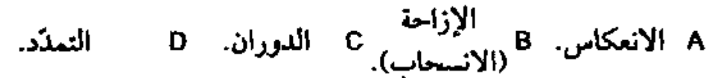
(٤) (٥) (٦)

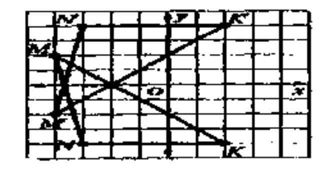
• باستخدام الورق يمكن للطلبة أن يستنتجوا بأنفسهم خواص كل من التحويلات الهندسية ويمكنهم كذلك أن يتوصلوا إلى ما يأتي.

- الإنعكاس عبارة عن المبادئ الأولية في فن طي الورق.
- الانسحاب عبارة عن إنعكاسين متتالين على محورين متوازين.
- الدوران عبارة عن إنعكاسين متتالين على محورين متعامدين.

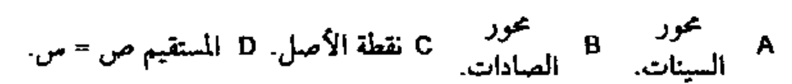
أسئلة نهاية الوحدة الخامسة

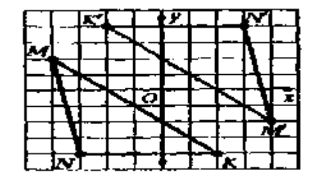
١. .... هو تحويل يُمثّل قلب الشكل في نقطة ، أو في خط مستقيم ، أو في مستوى.


A الانعكاس. B الإزاحة (الانسحاب). C الدوران. D التمدّد.

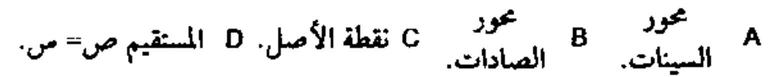


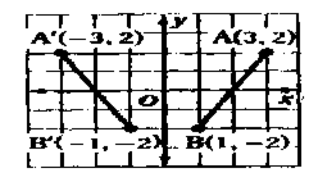
٢. في الشكل المجاور: "K'M'N' " هو صورة KMN " عن الانعكاس حول:


A محور السينات. B محور الصادات. C نقطة الأصل. D المستقيم ص = س.



٣. في الشكل المجاور: "K'M'N' " هو صورة KMN " عن الانعكاس حول:

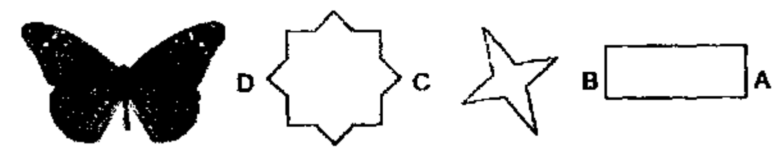

A محور السينات. B محور الصادات. C نقطة الأصل. D المستقيم ص= س.



٤. في الشكل المجاور: $\overline{A'B'}$ هو صورة $\overline{AB}$ عن الانعكاس حول:

A محور السينات. B محور الصادات. C نقطة الأصل. D المستقيم y = x.

٥. أيّ الأشكال الآتية ليس له محور تناظر:



٦. .... هي تحويل ينقل نقاط الشكل جميعها مسافات متساوية وفي الاتجاه نفسه.

A الانعكاس. B الإزاحة (الانسحاب). C الدوران. D التمدّد.

٧. رؤوس الشكل الرباعي أ ب ج د هي: (٢,٥)، (٣ ، ١)، (١ ، ٠)، (٤, ٠)، (٠ ، ١) على التوالي. إذا أزيح أ ب ج د بمقدار ٤ وحدات إلى اليمين ، و ٥ وحدات إلى الأعلى ، فما إحداثيات الرأس أَ ؟

A (٢ ، ٥) B (٦، ١٠) C (-٢، -١٠) D (٧ ، ٩)

٨. رؤوس الشكل الرباعي أ ب ج د هي: (٢,٥)، (٣ ، ١)، (١ ، ٠)، (٤, ٠)، (٠ ، ١) على التوالي. إذا أزيح أ ب ج د بمقدار ٣ وحدات إلى اليمين ، و ٤ وحدات إلى الأسفل ، فما إحداثيات الرأس دَ ؟

A (٤ ، ٤) B (١ ، ٠) C (-٤ ، ٤) D (-٢ ، -٤)

٩. انعكاس الشكل في خط مستقيم ، ثم انعكاس الصورة الناتجة في خط مستقيم يوازي الخط الأول. هي طريقة للحصول على............لشكل ما:

A انعكاس. B انسحاب (إزاحة). C دوران. D تمدّد.

١٠. .... تحويل تدور به كل نقطة من نقاط الشكل بزاوية معينة واتجاه معين حول نقطة ثابتة:

A الانعكاس. B الإزاحة (الانسحاب). C الدوران. D التمدّد.

١١. اخضاع الجسم لانعكاسين متعاقبين في خطين متقاطعين. هي طريقة للحصول على............لجسم حول نقطة:

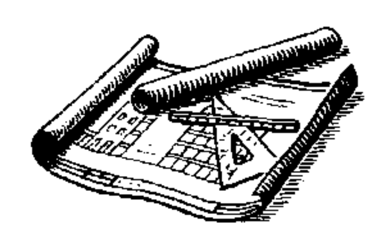
A انعكاس. B انسحاب (إزاحة). C دوران. D تمدّد.

١٢. إن نتيجة انعكاسين متعاقبين في خطين مستقيمين متعامدين تعادل دوراناً بزاوية قياسها......... حول نقطة تقاطع هذين الخطين.

A °٤٥ B °٩٠ C °١٣٥ D °١٨٠

الوحدة السادسة

المحيط والمساحات والحجوم والقياس



الوحدة السادسة

المحيط والمساحات والحجوم والقياس

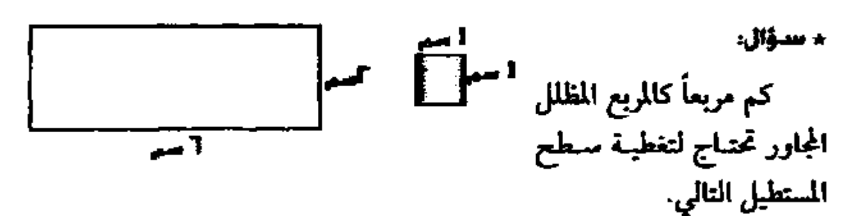
- مفهوم المحيط: هي مجموع الأضلاع الخارجية للشكل الهندسي.
- مفهوم المساحة: هي المنطقة الداخلية المحصورة داخل الشكل، ويعبّر عنها بعدد الوحدات المربعة التي تغطي شكل هندسي.

(٦-١) حساب مساحة الأشكال الهندسية:

تمهيد: إن موضوع حساب المساحات من أهم مواضيع الرياضيات المتعلقة بالحياة اليومية، فموضوع حساب المساحات يدخل في العديد من المجالات كالبناء. وتقسيم الأراضي والجغرافيا... إلخ.

* سؤال:

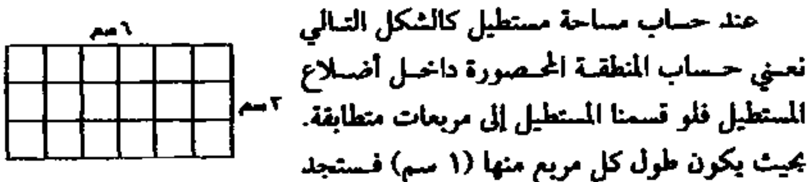
كم مربعاً كالمربع المظلل المجاور تحتاج لتغطية سطح المستطيل التالي.



- أراد محمد تغطية جدار غرفته بورق الزينة وكان حائط الغرفة على شكل مربع طول ضلعه (٣ م) فذهب إلى المكتبة فقال له صاحب المكتبة إنه يلزمك (٩ م) مربع من ورق الزينة، فماذا يقصد البائع؟

(٦-٢) حساب مساحة المستطيل والمربع

عند حساب مساحة مستطيل كالشكل التالي نعني حساب المنطقة المحصورة داخل أضلاع المستطيل فلو قسمنا المستطيل إلى مربعات متطابقة. بحيث يكون طول كل مربع منها (١ سم) فستجد أن هناك (١٨) مربعاً متطابقة. وستكون هذه المربعات المتطابقة عبارة عن حاصل ضرب (٦ مربعات) في الطول و (٣) مربعات في العرض.



∴ نستطيع القول أن مساحة المستطيل = الطول (سم) × العرض (سم) = المساحة سم^{٢}

أمثلة:

١. ما مساحة المستطيل الذي طوله (٤ سم) وعرضه (٣سم).

الحل:

المساحة للمستطيل = الطول × العرض = ٤ × ٣ = ١٢ سم^{٢} وتقرأ سم مربع

٢. قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٤٥ م وعرضها ٢٣ م أوجد مساحتها.

الحل:

مساحة الأرض = الطول × العرض

= ٤٥ × ٢٣ = ١٠٣٥ م^{٢}.

٣. نافذة طولها = ٢ م، وعرضها ٣ م احسب مساحة الزجاج اللازم لإغلاقها.

مساحة الزجاج = ٢ × ٣ = ٦ م^{٢}.

مساحة المربع: المربع هو مستطيل تساوى طوله مع عرضه.

إذن مساحته = طول ضلعه × طول ضلعه أي تساوي مربع طول ضلعه من الوحدات المربعة.

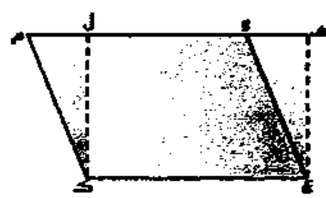
الخلاصة:

عند حساب مساحة المستطيل أو المربع تذكر القانون

مساحة المستطيل = الطول × العرض = وحدة مربعة.

مساحة المربع = (الضلع)^{٢} = وحدة مربعة.

(٦-٣) حساب مساحة متوازي الأضلاع:



انظر الشكل المجاور إنه يتكون من المستطيل هـ ع ك ل، ومتوازي الأضلاع و ع ك م (www.schoolarabia.net).

ما الشيء المشترك بين المستطيل ومتوازي الأضلاع؟

الجواب إنه القاعدة ع ك إنهما أيضاً محصوران بين مستقيمين متوازيين هما القاعدة المشتركة ع ك والمستقيم هـ م.

لاحظ في الرسم أيضاً وجود شكل شبه منحرف هـو و ع ك ل وهو قسم مشترك أيضاً بين المستطيل ومتوازي الأضلاع.

لاحظ أنه يوجد في الشكل مثلثان هما هـ ع و، ل ك م وليس من الصعب عليك أن تستنتج أنهما متطابقان تماماً (ابحث في هذا الأمر بنفسك).

لاحظ الآن أن المستطيل = Δهـ ع و + شبه المنحرف و ع ك ل........(١)

وأن متوازي الأضلاع = Δل ك م + شبه المنحرف و ع ك ل........(٢)

أن الطرف الأيسر من المعادلتين ٢،١ متساو لأن Δهـ ع و=Δل ك م، ولأن شبه المنحرف و ع ك ل موجود في كل منهما.

إذن الطرف الأيمن في كلا المعادلتين متساو وهذا من البديهيات. أكمل نص البديهية المؤدية إلى هذه النتيجة وهي:

الشيئان المساويان لثالث ------------.

إذن مساحة المستطيل هـ ع ك ل = مساحة متوازي الأضلاع و ع ك ل.

لكن مساحة المستطيل = ع ك × ك ل

إذن مساحة متوازي الأضلاع و ع ك ل = ع ك × ك ل

إن ع ك هي قاعدة متوازي الأضلاع، أما ك ل فهو ارتفاعه

تعريف:

ارتفاع متوازي الأضلاع: هو العمود النازل من أحد الرؤوس على القاعدة المقابلة، إذن مساحة متوازي الأضلاع و ع ك ل = طول قاعدته × طول ارتفاعه

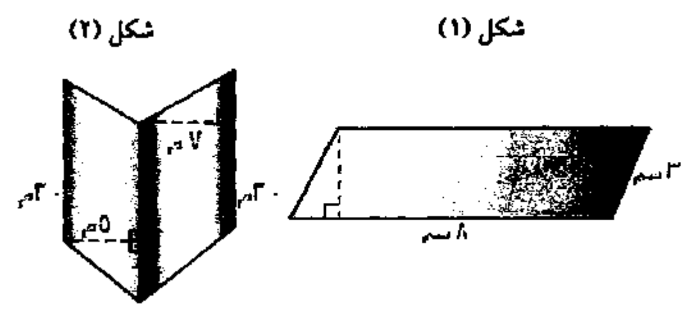
وباختصار = القاعدة × الارتفاع

ينطبق هذا الأمر على أي متوازي أضلاع آخر لذلك نقول عموماً:

مساحة متوازي الأضلاع = طول قاعدته × طول ارتفاعه.

أمثلة: احسب مساحة كل من الأشكال التالية:

شكل (١) شكل (٢)



مساحة الشكل (١) = طول القاعدة × الارتفاع

= ٨ × ٣ = ٢٤ سم٢.

مساحة الشكل (٢) = مساحة متوازي الأضلاع الأحمر + متوازي الأضلاع الأزرق

مساحة متوازي الأضلاع الأحمر = ٢٠ × ٧ = ١٤٠ م٢.

مساحة متوازي الأضلاع الأزرق = ٥ × ٢٠ = ١٠٠ م٢.

∴ مساحة الشكل = ١٤٠ + ١٠٠ = ٢٤٠ م٢.

تدريب شفوي:

أجب عن التمارين الآتية شفهياً:

- ما مساحة متوازي أضلاع طول قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٥ سم.
- ما مساحة متوازي أضلاعه الذي طول ارتفاعه ٢٠ م وطول قاعدته ٧ م.

- قطعة أرض على شكل متوازي أضلاع طول قاعدته ١٠٠ م وارتفاعه ٦٠ م، أوجد مساحتها.
- متوازي أضلاعه مساحته ٤٥٠ م^2 وارتفاعه ٩ م، ما طول قاعدته.

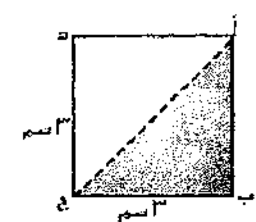
تدريب (٢):

الشكل هـ و ع ك متوازي الأضلاع والأبعاد ظاهرة عليه، احسب طول هـ ن.



(٦-٤) حساب مساحة المثلث:

تعلمت أن مساحة المربع هي طول (الضلع)^2 فلو كان لدينا مربع طول ضلعه ٣سم كما في الشكل وطلب منك إيجاد مساحته لكان جوابك هو (٩ سم^2).



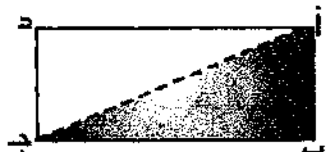
ما مقدار مساحة المثلث أ ب جـ مقارنة بمساحة المربع أ ب جـ د.

ما رأيك هي $\frac{1}{2}$ مساحة المربع أم $\frac{1}{4}$ مساحة المربع.

سيكون جوابك بالطبع أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة المربع أ ب جـ د.

وبالتالي فإن مساحة المثلث= $\frac{1}{2}$ × (الضلع)^2

وكذلك الأمر لو كان بدلاً من المربع مستطيل فإن مساحة ∆ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ مساحة المستطيل.



= $\frac{1}{2}$ × الطول × العرض

= $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٢ = ٣ سم^2



وأيضاً لو طلب إيجاد مساحة Δأ ب جـ في الشكل المجاور.

لاحظ أن Δ أب جـ عبارة عن نصف متوازي الأضلاع أب جـ د

أي أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د

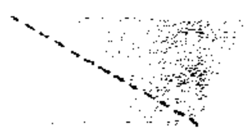
= $\frac{١}{٢}$ × (طول القاعدة × الارتفاع)

= $\frac{١}{٢}$ (٨×٤) = $\frac{١}{٢}$×٣٢ = ١٦ سم^{٢}.

نلاحظ مما سبق أن مساحة المثلث هي عبارة عن نصف مساحة المستطيل أو المربع أو متوازي الأضلاع وهذا يقودنا إلى استنتاج مفاده أنّ:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع

نشاط للدارس:

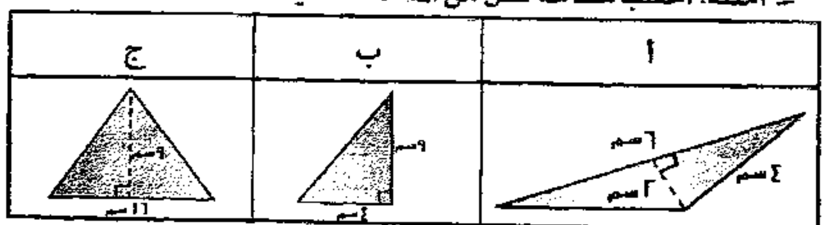


أثبت أن مساحة أي متوازي أضلاع = حاصل ضرب قاعدته × ارتفاعه وذلك عن طريق توصيل أحد قطريه.

على أساس أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$× قاعدته× ارتفاعه

أ- أمثلة: احسب مساحة كل من المثلثات التالية:

ج	ب	أ



مساحة المثلث (أ)= $\frac{١}{٢}$ × قاعدته × الارتفاع

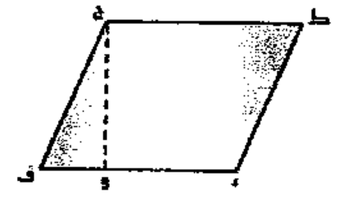
= $\frac{١}{٢}$ × ٦×٢ = ٦ سم^{٢}.

لاحظ هنا الارتفاع كان (٢) وليس (٤) لأن الارتفاع يجب أن يكون عمودياً على القاعدة.

مساحة المثلث (ب) $\frac{١}{٢} × ٤ × ٩ = ١٨$ سم^{٢}.

لاحظ فى المثلث القائم الزاوية تكون المساحة = $\frac{١}{٢}$ × (حاصل ضرب ضلعي القائمة)

مساحة المثلث (ج) $\frac{١}{٢} × ١٦ × ٩ = ٧٢$ سم^{٢}.



(٦-٥) مساحة المعيَّن:

من منطلق كون المعيَّن متوازي الأضلاع (لكن أضلاعه الأربعة متساوية)

إذن.....

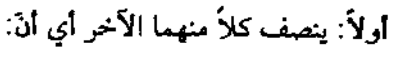
مساحته = قاعدته × ارتفاعه

= طول أحد أضلاعه×ارتفاعه(العمود النازل عليه من الرأس المقابل)

في الشكل المعطى مساحة المعين = ر ف × ح و

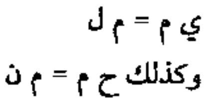
حيث رف يمثل طول ضلع المعين، ح و يمثل ارتفاعه.

طريقة أخرى لحساب مساحة المعيَّن: هل تتذكر خواص قطري المعيَّن؟



أولاً: ينصف كلاً منهما الآخر أي أنَّ:

ي م = م ل



وكذلك ح م = م ن

ثانياً: متعامدان أي أن الزوايا الأربع التي رأسها م كلها قوائم.

وعلى هذا الأساس في المثلث ح ي ل، يمكن اعتبار ي ل قاعدة،ح م الارتفاع.

مساحة المعيَّن ح ي ن ل = $\frac{١}{٢}$ مساحة المثلث ح ي ل

أي أن مساحة المعيَّن ح ي ن ل = ٢ × مساحة المثلث ح ي ل

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ ي ل × ح م

= ي ل × ح م

= ي ل × $\frac{ح ن}{٢}$ (ح م = $\frac{١}{٢}$ ح ن).

= $\frac{ي ل × ح ن}{٢}$ = $\frac{حاصل ضرب قطرا المعين}{٢}$

الخلاصة:

مساحة المعيَّن = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب قطريه.

حل التمارين التالية شفوياً:

أ. جد مساحة المعيَّن الذي طول ضلعه ١٠ م وارتفاعه ٦ م.

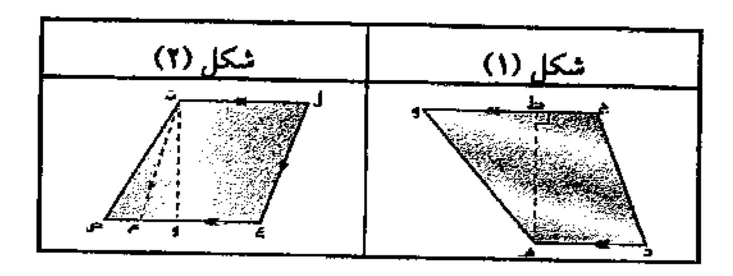
ب. جد مساحة المعيَّن حيث طولا قطريه ٢٠، ١٥ م.

ج. مساحة المعيَّن ١٠٠ سم^{٢} وطول أحد قطريه ٢٠ سم، أوجد طول القطر الثاني.

(٦-١) مساحة شبه المنحرف:

تعلم أن شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط، نطلق على هذين الضلعين المتوازيين اسم القاعدتين وكل ضلع منهما قاعدة. كيف نجد مساحة شبه المنحرف بالاستفادة من هاتين القاعدتين المتوازيتين؟

انظر الأشكال التالية لتساعدك في معرفة كيفية حساب مساحة شبه المنحرف (www.schoolarabia.net).



- في الشكل (١) ---- العمود النازل من الرأس على القاعدة المقابلة لشبه المنحرف يسمى ارتفاع شبه المنحرف، قاعدتا شبه المنحرف هما د هـ، ج و. إذن ارتفاع شبه المنحرف هو هـ ط. وهو العمود النازل من الرأس هـ على القاعدة ج و لاحظ أن ∡ د هـ ط قائمة(ما الدليل على ذلك؟).
- في الشكل (٢) ---- ل ع ص ت شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان هما ل ت، ع ص، أما ارتفاعه فهو ت و.
  أما ت م فقد رسمناه موازياً لضلع شبه المنحرف ل ع.

❖ ما نوع الشكل ل ع م ت؟ إنه متوازي الأضلاع (ما الدليل على ذلك؟).

لقد انقسم شبه المنحرف بالخط ت م إلى قسمين هما متوازي الأضلاع ل ع م ت، والمثلث ت م ص.

∴ شبه المنحرف ل ع ص ت = متوازي الأضلاع ل ع م ت + المثلث ت م ص

مساحة شبه المنحرف ل ع ص ت = مساحة متوازي الأضلاع ل ع م ت + مساحة المثلث ت م ص

❖ والآن كيف تحسب مساحة متوازي الأضلاع ل ع م ت؟

مساحة متوازي الأضلاع ل ع م ت = قاعدته × ارتفاعه

= ع م × ت و ....(١)

= ل ت × ت و لأن ع م = ل ت

مساحة المثلث ت م ص = $\frac{١}{٢}$ × م ص × ت و ....(٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) نجد أنّ:

متوازي الاضلاع ل ع م ت+المثلث ت م ص= ع م × ت و + $\frac{١}{٢}$ م ص×ت و

= ت و (ع م + $\frac{١}{٢}$ م ص)

= ت و ($\frac{٢ ع م + م ص}{٢}$)

= ت و ($\frac{(ع م + م ص) + ع م}{٢}$)

= ت و × ($\frac{ع ص + ع م}{٢}$)

لكن ع م = ل ت، ت و هو ارتفاع شبه المنحرف د ع ص ت.

إذن مساحة متوازي الاضلاع ل ع م ت+المثلث ت ص م=ت و × ($\frac{ع ص + ل ت}{٢}$)

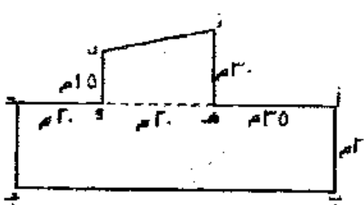
= ارتفاع شبه المنحرف × $\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{٢}$

أي أن مساحة شبه المنحرف = ارتفاعه × $\frac{١}{٢}$ مجموع طولا قاعدتيه.

والآن وبعدما عرفت حساب كل من الأشكال الهندسية السابقة سنقوم بحساب مساحة بعض الأشكال الهندسية التي يمكن أن تكون مكونة من بعض الأشكال السابقة.

مثال ١:

الشكل المجاور يمثل مخطط لقطعة أرض والمطلوب حساب مساحتها.
يمكن حساب مساحة الأرض بتجزئة المخطط إلى أشكال معروفة القوانين.



الحل: مساحة قطعة الأرض = مساحة المستطيل (أ ب جـ د) + مساحة شبه المنحرف(هـ و ن ز)

والآن مساحة المستطيل (أ ب جـ د) = الطول × العرض

= (٣٥ + ٢٠ + ٢٠) × ٢٥ = ٧٥ × ٢٥ = ١٨٧٥ م^{٢}.

مساحة شبه المنحرف (هـ و ن ز) = $\frac{١}{٢}$ (٣٠+١٥) × ٢٠

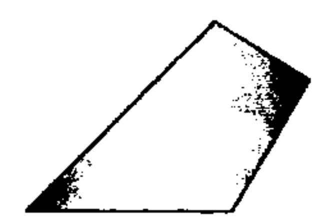
= $\frac{١}{٢}$ × (٤٥) × ٢٠ = ٤٥٠ م^{٢}

∴ مساحة القطعة كاملة = ١٨٧٥ + ٤٥٠ = ٢٣٢٥ م^{٢}.

*** للمناقشة**

ما هي الخطوط التي يمكن أن نستعين بها لحساب مساحة الأرض ويمثلها الشكل الرباعي المجاور.

اقترح طريقتين مختلفتين على الأقل.



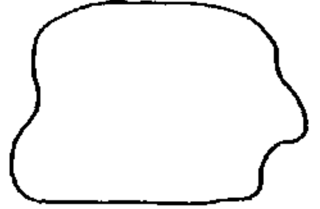
حساب مساحة الأشكال اللاهندسية (الأشكال غير المنتظمة):

تمهيد:

لقد عرفت مما سبق أهمية حساب المساحات في الحياة، كما عرفت أيضاً كيفية إيجاد المساحة للأشكال الهندسية. ولكن هناك بعض الأشكال غير منتظمة فكيف يمكن حساب تلك المساحات؟

*** سؤال:**

لديك الشكل التالي: كيف يمكن حساب مساحته؟



عند حساب مساحة مثل هذه الأشكال نسعى لتقسيم هذا الشكل إلى مربعات متطابقة كل منها مساحته (١ وحدة مربعة).

ثم نأخذ المربعات الكاملة وغير الكاملة ونعطيها أرقاماً ونجد عددها كلها، ثم نأخذ عدد المربعات الكاملة.

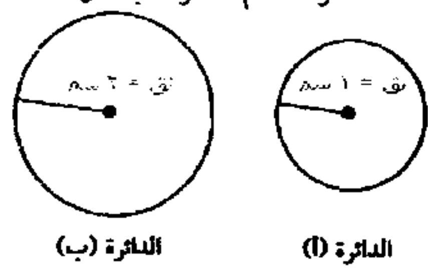
مساحة الشكل بالتقريب = $\frac{\text{عدد المربعات كلها + عدد المربعات غير الكاملة}}{٢}$

(٦-٧) مساحة الدائرة والقطاع الدائري:

إن الدائرة من أهم الأشكال التي شغلت العلماء القدامى في إيجاد مساحتها والتعرف على عناصرها، ولو عدنا لتعريف الدائرة (مجموعة من النقاط تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة وهي مركزها). تجد أن ما يحدد مساحتها هو طول نصف قطرها. إن هذا أمر بديهي يثبته الواقع العملي دون حاجة لبرهان.

★ **سؤال:**

أيهما أكبر مساحة الدائرة (أ) أم الدائرة (ب)، ولماذا؟؟؟؟



الدائرة (أ) **الدائرة (ب)**

لقد اكتشف العلماء اليونانيون منذ ما قبل ميلاد المسيح وبعد أن قاسوا محيط العديد من الدوائر وأقطارها أن

النسبة $\pi = \frac{\text{طول محيط الدائرة}}{\text{طول قطرها}}$

= مقداراً ثابتاً ونظراً لكون هذا المقدار عدد غير نسبي فقد أطلق عليه علماء الرياضيات النسبة التقريبية، وعادة ما نستعمل في مسائلنا النسبة التقريبية أما $\frac{٢٢}{٧}$، أو ٣,١٤، ويستعمل العلماء أرقاماً أكثر دقة بعدد أكبر من المنازل العشرية. اتفق العلماء فيما بينهم على الإشارة للنسبة التقريبية بالحرف اليوناني π (باي Pi) اعترافاً بفضل العلماء اليونانيين في اكتشافها وتحديد قيمتها (www.schoolarabia.net).

أمثلة:

١. احسب مساحة الدائرة في كل مما يلي:

أ. إذا كان نق = ٤ سم.

الحل: المساحة = (نق)^{٢} π= (٤)^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ = $\frac{٣٥٢}{٧}$ = ٥٠,٣ سم^{٢}

ب. إذا كان نق = ٢١ سم.

الحل: مساحة الدائرة نق^{٢} π = (٢١)^{٢} × $\frac{٢٢}{٧}$ = ١٣٨٦ سم^{٢}

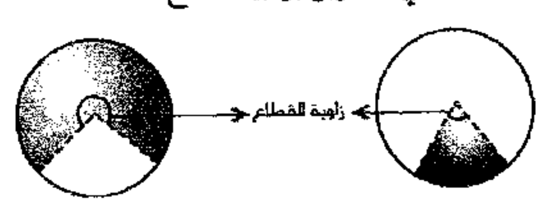
ج. إذا كان نق = ٣٠ سم.

الحل: مساحة الدائرة = نق^{٢} π = ٣٠ × ٣٠ × ٣,١٤ = ٩ × ١٠٠ × ٣,١٤

= ٩ × ٣١٤ = ٢٨٢٦ سم^{٢}.

والآن: ما القطاع الدائري؟ وماذا يختلف عن الدائرة؟

يسمى الشكل الهندسي المظلل في كل من الدائرتين قطاعاً دائرياً. ونسمي الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين بزاوية القطاع.



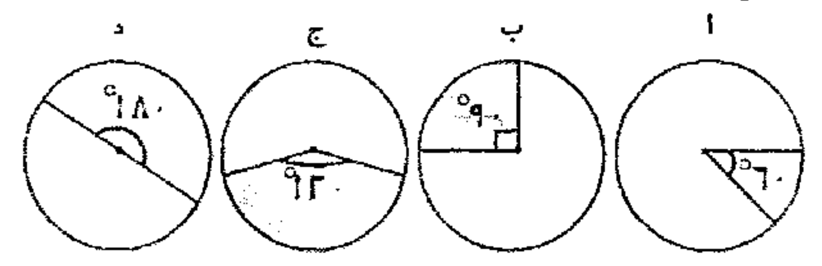
القطاع الدائري: هو شكل هندسي مستوي يتكون من نصفي قطرين للدائرة والقوس المحصور بينهما.

نشاط: اكتب تعريفاً آخر للقطاع الدائري بلغتك الخاصة.

"هو شكل مكون من قوس دائري ونصفي القطرين اللذين يتصلان بنهاية هذا القوس".

"أي جزء من الدائرة محدد بنصفي قطرين فيها".

ولإيجاد مساحة القطاع الدائري تذكر أن مساحة الدائرة = نق^{٢} π لاحظ كلاً من الأشكال التالية:



ما مساحة القطاع المظلل في كل دائرة بالنسبة للدائرة نفسها.

الدائرة (أ) مساحة القطاع = $\frac{١}{٦}$ من مساحة الدائرة (أ)

الدائرة (ب) مساحة القطاع = $\frac{١}{٤}$ من مساحة الدائرة (ب)

الدائرة (ج) مساحة القطاع = $\frac{١}{٣}$ من مساحة الدائرة (ج)

الدائرة (د) مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ من مساحة الدائرة (د)

*** سؤال:**

لماذا كانت مساحة القطاع= $\frac{١}{٦}$ مساحة الدائرة حينما كانت زاويته= ٦٠°؟

= $\frac{١}{٤}$ مساحة الدائرة حينما كانت زاويته = ٩٠°؟

= $\frac{١}{٣}$ مساحة الدائرة حينما كانت زاويته= ١٢٠°؟

= $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائرة حينما كانت زاويته= ١٨٠°؟

تعلم من مفهوم الدائرة أن النقطة (أ) حينما تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة م ثم تعود إلى موقعها الأصلي تكون قد دارت دورة كاملة ومقدارها (٣٦٠°)،فإذا أخذنا الزاوية (٦٠°) كجزء من ٣٦٠° سوف تجد أن:

$$\frac{٦٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٦}$$

وكذلك $\frac{٩٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{١٢٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٨٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٢}$

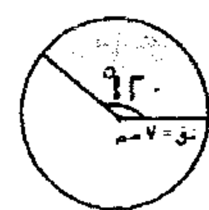
ونستنتج من هذا كله أنّ:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{هـ}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

حيث هـ تمثل زاوية القطاع بالدرجات.

الدائرة تنتج عن دورة كاملة $\frac{٣٦٠}{٣٦٠} = ١$

أمثلة:



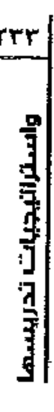
استخدم $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤ حسب ما تراه مناسباً ما لم يشر إلى غير ذلك.

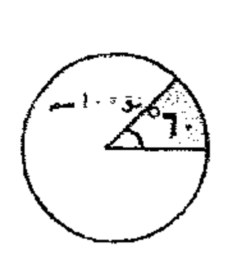
١. احسب مساحة الجزء المظلل في كل مما يلي:

مساحة القطاع (أ) = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × نق^٢ π

$$= \frac{١}{٣} \times ٧ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧}$$

$$= \frac{٢٢ \times ٧}{٧} = \frac{١٥٤}{٣} \text{ سم}^٢$$



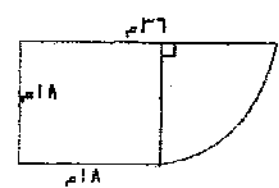


مساحة القطاع (ب) = $\frac{٦٠}{٣٦٠} \times (١٠)^٢ \times ٣,١٤$

$= \frac{١}{٦} \times ١٠٠ \times ٣,١٤ =$

$= \frac{١٥٧}{٦}$ سم^٢.

٢. احسب مساحة الشكل المجاور:



الحل:

مساحة الشكل المجاور = مساحة المربع + مساحة القطاع الدائري

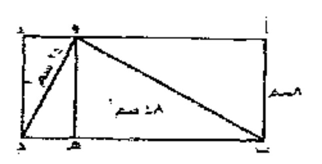
$= (\text{الضلع})^٢ + \frac{٩٠}{٣٦٠} \times \text{نق}^٢ \pi$

$= (١٨ \times ١٨) + \frac{١}{٤} \times ١٨ \times ١٨ \times \frac{٢٢}{٧}$

$= ٣٢٤ + \frac{١١ \times ١٨ \times ٩}{٧}$

$= ٣٢٤ + \frac{١٧٨٢}{٧} = \frac{١٧٨٢ + ٢٢٦٨}{٧} = \frac{٤٠٥٠}{٧}$ سم^٢.

= ٥٧٨,٥٧ سم^٢ تقريباً.



١. أ ب جـ د مستطيل، من المعلومات المعطاة على الشكل أوجد طول: ب ج، هـ ج.

الحل:

١. مساحة المثلث و ب هـ = $\frac{\text{و هـ} \times \text{ب هـ}}{٢}$

لاحظ أن المثلث و ب هـ قائم الزاوية في هـ.

بما أن و هـ = أ ب................ ضلعان متقابلان في المستطيل أ ب هـ و.

إذن و هـ = ٨ سم.

إذن ٤٨ = $\frac{٨ \times ب هـ}{٢}$

ومنه ب هـ = ---------- سم.

والآن أجب بنفسك عما يلي:

- كم مساحة المثلث و هـ ج؟............... إنها ----- سم^{٢}.

كيف عرفت؟؟

- مساحة المثلث و هـ ج = $\frac{و هـ \times هـ ج}{٢}$

٢٤ = $\frac{٨ \times هـ ج}{٢}$

ومنه هـ ج = ----- سم^{٢}.

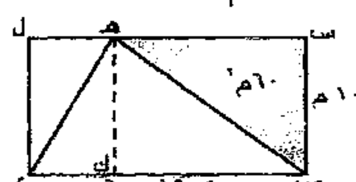
- طول ب ج = طول ب هـ + طول هـ ج

= -------- + ----- = ---- سم.

٢. س ص ع ل مستطيل. (انظر الشكل)

أوجد: أ. مساحة المثلث هـ ع ل.

ب. طول ك ع.



الحل:

- كم مساحة المستطيل س ص ع ل؟ = ------------ م^{٢}.

- كم مساحة المثلث ص هـ ع؟ = ---------- م^{٢}.

- مساحة المثلث س ص هـ + مساحة المثلث ص ع هـ = ---- م^{٢}.

- مساحة المثلث هـ ع ل = مساحة المستطيل س ص ع ل - مساحة المثلث س ص هـ - مساحة المثلث ص هـ ع.

= ------------ م^{٢}.

- مساحة المثلث هـ ك ع = مساحة المثلث ع ل هـ لأنهما متطابقان.

$$= \frac{\text{هـ ك × ك ع}}{٢}$$

ومنه بعد الحل ك ع = ٣ م.

٣. ك و ط ح متــوازي الأضــلاع. مــن المعلومات المعطاة أوجد طول:

أ. قاعدته و ط.

ب. ارتفاعه ك ف.

الحل:

- كم مساحة المثلث ك ف ط؟ = ١٥ م^{٢} + ٤٠ م^{٢} = ٥٥ م^{٢}.

$$\text{مساحة المثلث ك ف ط} = \frac{\text{ك ف × ف ط}}{٢}$$

$$٥٥ = \frac{\text{ك ف × (ف و + و ط)}}{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$= \frac{\text{ك ف (٦ + و ط)}}{٢}$$

$$\text{مساحة المثلث ك و ط} = \frac{\text{ك ف × و ط}}{٢}$$

$$٤٠ = \frac{\text{ك ف × و ط}}{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

وبقسمة (١) على (٢) نحصل على:

$$\frac{٥٥}{٤٠} = \frac{\text{ك ف (ف و + و ط)}}{٢} \div \frac{\text{ك ف × و ط}}{٢}$$

$$= \frac{\text{ك ف (ف و + و ط)}}{٢} \times \frac{٢}{\text{ك ف × و ط}}$$

$$\frac{١١}{٨} = \frac{\text{ف و + و ط}}{\text{و ط}} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{بعد الاختصار}$$

$$\frac{١١}{٨} = \frac{\text{٦ + و ط}}{\text{و ط}}$$

وبالضرب التبادلي نحصل على:

١١ و ط = ٤٨ + ٨ و ط

١١ و ط ـ ٨ و ط ـ ٨ وط = ٤٨ + ٨ وط ـ ٨ و ط

٣ وط = ٤٨

$$و\ ط = \frac{٤٨}{٣} = ١٦\ م.$$

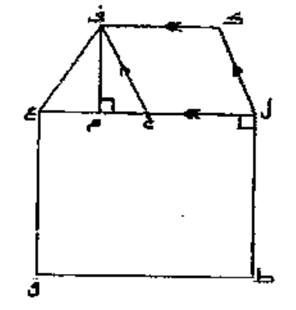
جد الارتفاع ك ف بنفسك.

يوجد طرق أخرى للحل جد واحدة منها على الأقل بنفسك.

٤. قطعة أرض سداسية الشكل ك ل ط ق ع ف المطلوب إيجاد مساحتها من المعلومات المعطاة تالياً: طول ف م = ١٠ م. مساحة Δ ف ح ع = ٨٠ م^{٢}

مساحة متوازي الاضلاع ك ل ح ف = $\frac{٣}{٢}$ مساحة Δ ف ح ع.

الشكل ل ط ق ع مستطيل وطول ل ط = ٢٠ م.



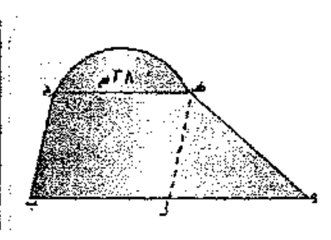
الحل:

أجب عن الأسئلة التالية بنفسك تصل إلى حل السؤال.

- كيف يمكنك إيجاد طول ح ع؟
- كيف يمكنك إيجاد مساحة متوازي الأضلاع ك ل ح ف؟
- بعد معرفة مساحة متوازي الأضلاع كيف يمكنك إيجاد طول ل ح؟
- هل عرفت الآن طول ل ع؟
- كم مساحة المستطيل ل ط ق ع؟

مساحة قطعة الأرض = مساحة المثلث ف ح ع + مساحة متوازي الأضلاع ك ل ح ف + مساحة المستطيل ل ط ق ع.

= ٧٦٠ م^{٢}.



٥. قطعة أرض مكونة من نصف دائرة وشبه منحرف (كما يظهر في الشكل) المطلوب حساب مساحتها من المعلومات المعطاة.

طول هـ ج = ٢٨ م.

مساحة متوازي الأضلاع هـ ل ب ج = ٨٤٠ م^{٢}.

مساحة Δهـ و ل = $\frac{٣}{٤}$ مساحة متوازي الاضلاع هـ ل ب ج.

الحل:

- مساحة متوازي الأضلاع هـ ل ب ج معطاة.
- مساحة المثلث هـ ول يمكنك حسابها بسهولة.
- مساحة نصف الدائرة = $\frac{\pi \text{ نق}^{٢}}{٢}$ لاحظ أن قطر الدائرة = ٢٨ م

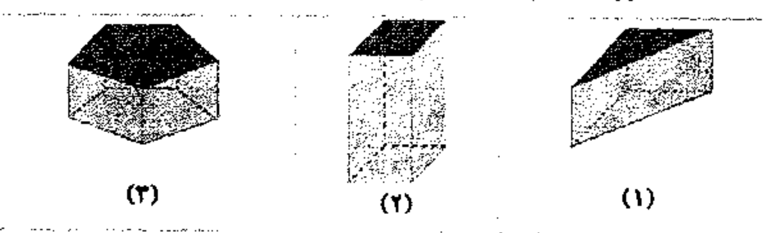
$= \frac{(١٤)^{٢} \times ٢٢}{٢ \times ٧}$ (لماذا)؟؟

= ٣٠٨ م^{٢}.

مساحة الشكل = ------------ م^{٢}.

المساحة والحجوم للمجسمات

(١-٨) المنشور القائم حجمه ومساحة سطحه



الأشكال الثلاثة أمامك يسمى كل واحد منها منشوراً قائماً، والعلماء يميزون بين منشوراً وآخر باعتماد شكل القاعدة، فالمنشور رقم (١) هو منشور

ثلاثي لأن قاعدته مثلث، والمنشور رقم (٢) يسمى منشوراً رباعياً، والمنشور رقم (٣) يسمى منشوراً خماسياً، وهكذا.

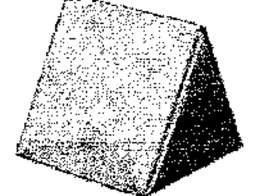
إذن المنشور القائم هو شكل منتظم يتكون من قاعدتين متطابقتين يصل بين حوافهما خطوطاً عمودية، وأوجهه الجانبية مستطيلات.

حالات خاصة:

المكعب: هو منشور قائم أبعاده الثلاثة متساوية.

مثال: خزان ماء طوله وعرضه وارتفاعه = ١ م.

المنشور الثلاثي Triangular Prism



وهو منشور قائم قاعدته مثلث وله ثلاث أوجه جانبية كل منها مستطيل.

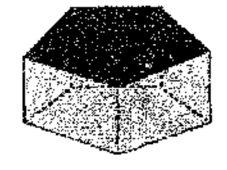
أمثلة:

أوضح الأمثلة على هذا النوع موشورات تحليل الضوء وعادة ما تكون قاعدتها مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين، أو مثلث متساوي الأضلاع.

أمثلة أخرى:

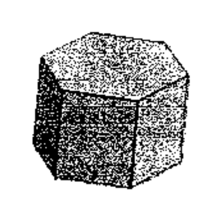
بعض أنواع علب العصير قد تكون على شكل المنشورات الثلاثية.

المنشور الخماسي



وهو منشور قائم قاعدته خماسي منتظم أو غير منتظم Pentagonal Prism.

وأشهر مثال لهذا النوع: هو وزارة الدفاع الأمريكية المعروفة باسم Pentagon نسبة لشكل بنائها.



المنشور السداسي:

وهو منشور قاعدته سداسي منتظم أو غير منتظم Hexagonal Prism.

مثال:

أوضح مثالي طبيعي عليه هو بلورات المرو (Quartz) السداسية.

المساحة الجانبية للمنشور القائم= محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحتي قاعدتين

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال:

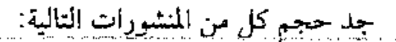
منشور سداسي قائم مساحة قاعدته ٦٠ سم^{٢} وارتفاعه ١٢ سم. جد حجمه.

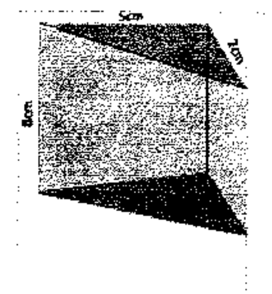
الحل:

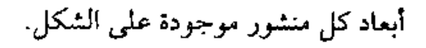
حجم المنشور = مساحة قاعدته × ارتفاعه

= ٦٠ سم^{٢} × ١٢ سم = ٧٢٠ سم^{٣}.

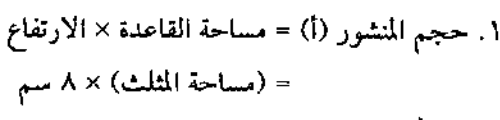
أمثلة:


جد حجم كل من المنشورات التالية:



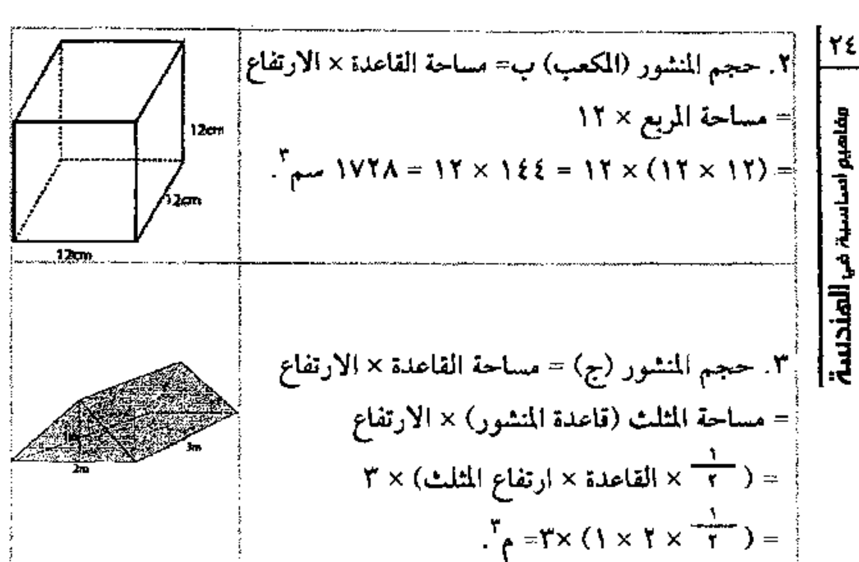

أبعاد كل منشور موجودة على الشكل.

قاعدة المنشور الاول مثلث قائم الزاوية طول ضلعية القائمة فيه ٢ و ٥ سم.


١. حجم المنشور (أ) = مساحة القاعدة × الارتفاع

= (مساحة المثلث) × ٨ سم

= ($\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٢) × ٨ = ٤٠ سم^{٣}.



٢. حجم المنشور (المكعب) ب= مساحة القاعدة × الارتفاع

= مساحة المربع × ١٢

= (١٢ × ١٢) × ١٢ = ١٤٤ × ١٢ = ١٧٢٨ سم^{٣}.

٣. حجم المنشور (ج) = مساحة القاعدة × الارتفاع

= مساحة المثلث (قاعدة المنشور) × الارتفاع

= ($\frac{١}{٢}$ × القاعدة × ارتفاع المثلث) × ٣

= ($\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١) ×٣= م^{٣}.

٤. منشور خماسي مساحة قاعدته ١٢ سم^{٢} وارتفاع ٣ سم أوجد حجمه.

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١٢ × ٣ = ٣٦ سم٣.

٥. إذا كان حجم متوازي مستطيلات ٩٠ سم^{٣} مساحة قاعدته ٣٠ سم^{٢}، احسب ارتفاعه.

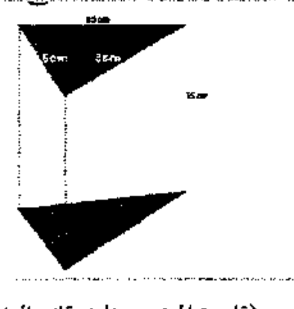
حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

٩٠ = ٣٠ × ع

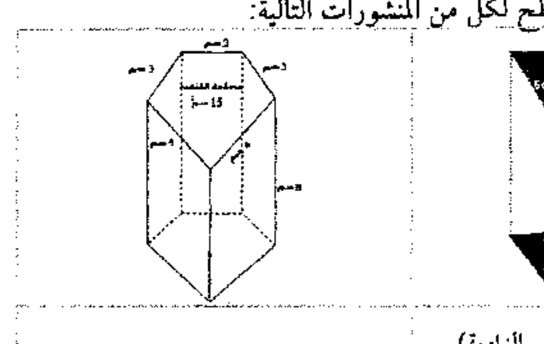
الارتفاع= $\frac{٩٠}{٣٠}$ = ٣ سم.

امثلة اضافية:

احسب مساحة السطح لكل من المنشورات التالية:



(قاعدة المنشور مثلث قائم الزاوية)



أ. مساحة السطح = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= (محيط القاعدة × الارتفاع) + ٢ (مساحة القاعدة)

= (٨ + ١٠ + ٦) × ١٥ + ٢ ($\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦)

= ٣٦٠ سم^{٢} + ٤٨ سم^{٢} = ٤٠٨ سم^{٢}.

ب. مساحة السطح= المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= (محيط القاعدة × الارتفاع) +(٢ × ١٥ سم^{٢}).

= (٢ + ٣ + ٣ + ٤ + ٤) × ٨ + ٣٠ سم^{٢}

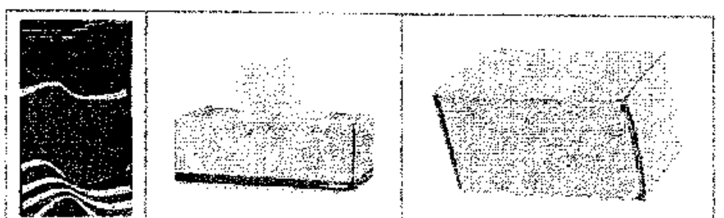
= (٨ × ١٦) + ٣٠ = ١٢٨ + ٣٠ = ١٥٨ سم^{٢}

(٦-٩) متوازي المستطيلات Rectangular Prism

هو منشور قائم قاعدته مستطيل وكل أوجهه الأخرى مستطيلات. وقد تكون قاعدته مربعة (أي طوله = عرضه) وارتفاعه له قياس مختلف عن طول قاعدته المربعة.

أمثلة:

علبة محارم ورقية، بعض أنواع علب العصير، غرفة قاعدتها مستطيل.



تدريب:

- اضرب ثلاثة أمثلة لمتوازيات مستطيلات مألوفة لديك.
- اكتب بلغتك الخاصة تعريفاً لمتوازي المستطيلات.

المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = ٢ × (الطول + العرض)× الارتفاع

المساحة الكلية= المساحة الجانبية + ٢ × س ص

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

مثال:

صندوق من الخشب على شكل متوازي مستطيلات أبعاده ٢، ٣، ٥ م. احسب حجمه.

الحل:

حجم الصندوق = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة.

حجم الصندوق = ٢م × ٣م × ٥م

= ٣٠ م^{٣}.

مثال:

باب من الخشب ارتفاعه ٢ م، وعرضه ١ م، وسماكة الخشب المصنوع منه = ٥ سم. بفرض أن الباب منتظم وعلى شكل متوازي مستطيلات، فالمطلوب حساب حجم مادة الخشب التي صنع منها الباب.

الحل:

حجم الباب = ارتفاعه × عرضه × سماكته = حجم الخشب المصنوع منه.

لاحظ هنا أن الأبعاد مختلفة في وحداتها فاثنان منها مقاسان بالمتر والثالث بالسم، إذن عند حساب الحجم يجب جعل الوحدات كلها متشابهة.

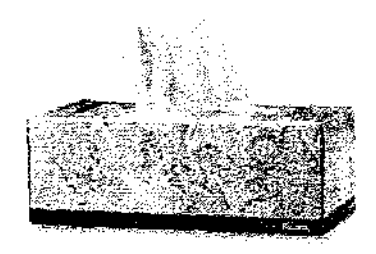
إذن حجم الباب = حجم الخشب = ٢ م × ١ م × $\frac{\text{٥ سم × ١م}}{\text{١٠٠ سم}}$

لاحظ أننا ضربنا ٥ سم × ١ (حتى لا نغير قيمتها وذلك على شكل ($\frac{\text{١ م}}{\text{١٠٠ سم}}$ = ١)

إذن حجم الخشب = ٢م × ١ م × $\frac{\text{١}}{\text{٢٠}}$ م ($\frac{\text{سم}}{\text{سم}}$ = ١)

= ٠,١ م^{3}

مثال:



احسب مساحة سطح علبة محارم ورقية إذا كانت قاعدتها مستطيلة طولها = ٢٥ سم، وعرضها = ١٢ سم، علماً بأن ارتفاع العلبة ٥سم.

الحل:

مساحة الأوجه الجانبية = الارتفاع × محيط القاعدة

= ٥ (٢٥ + ٢٥ + ١٢ + ١٢)

= ٥ × ٧٤

= ٣٧٠ سم^{2}.

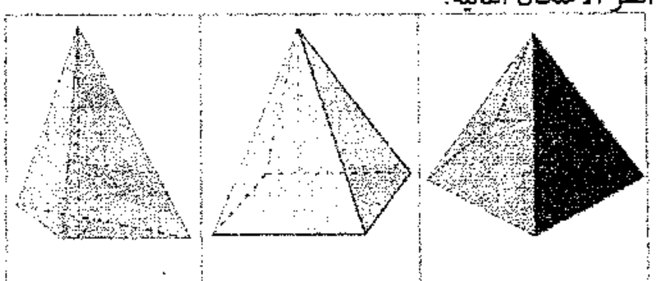
مساحة القاعدتين = ٢ × ٢٥ × ١٢
= ٦٠٠ سم^{٢}.

إذن مساحة سطح العلبة كلها = ٣٧٠ + ٦٠٠
= ٩٧٠ سم^{٢}.

(٦-١٠) الهرم:

لا بد وأنك تعرف أهرام مصر، فهي إحدى عجائب الدنيا السبع، ولو أردنا تعريف الهرم القائم، لقلنا إنه عبارة عن شكل له قاعدة منتظمة وله أوجه جانبية عبارة عن مثلثات متساوية الساقين عددها عدد أضلاع القاعدة وتلتقي رؤوسها في نقطة واحدة هي رأس الهرم،

يسمى ارتفاع المثلث المتساوي الساقين بالارتفاع الجانبي للهرم أما ارتفاع الهرم فهو الخط العمودي النازل من رأسه على قاعدته. ولتوضيح صورة الهرم لديك انظر الأشكال التالية:



وهناك هرم ثلاثي وسداسي والذي يحدد نوع الهرم هو عدد أضلاع قاعدته.

وسوف نبحث معاً في إيجاد مساحة سطح الهرم الخارجية وكذلك حجم الهرم القائم.

أولاً: مساحة سطح الهرم الخارجية:

لاحظ أن المساحة الجانبية للهرم عبارة عن مثلثات أي أن المساحة الجانبية للهرم = عدد المثلثات × مساحة المثلث

حيث أن عدد المثلثات هو نفسه عدد أضلاع القاعدة.

أي أنّ: المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحة المثلثات التي هي أوجه الهرم

لكن قواعد هذه المثلثات ليست سوى أضلاع قاعدته.

= $\frac{١}{٢}$ × محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبي للهرم.

أمثلة:

١.هرم رباعي قائم مساحة أحد أوجهه ٢٠ سم٢، فما مساحته الجانبية؟

الحل:

الأوجه هنا ٤ مثلثات متطابقة، وبما أن مساحة الواحدة منها = ٢٠ سم٢
إذن:

مساحة الهرم الجانبية = مساحة أحد الأوجه × عدد الأوجه

= ٢٠ × ٤ = ٨٠ سم٢.

٢. هرم خماسي طول ضلع قاعدته ٣ سم وارتفاعه الجانبي ٦ سم احسب مساحة سطحه الخارجية؟

الحل:

مساحة سطح الهرم الخارجية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ (٥ × ٣) × ٦

= ١٥ × ٣ = ٤٥ سم٢.

٣. هرم سداسي ارتفاعه الجانبي ١٦ سم، وطول قاعدته ١٤ سم. أوجد مساحته الجانبية

الحل:

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ × (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ١٤) × ١٦

= ٣ × ١٤ × ١٦ = ٦٧٢ سم٢.

ثانياً: حجم الهرم القائم:

لا شك أن حجم الهرم الرباعي أصغر من حجم متوازي المستطيلات الذي له ذات القاعدة والارتفاع، وقد وجد العلماء من تجارب أجريت على متوازيات مستطيلات وأهرامات لها نفس الارتفاع أنّ:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم الموشور المشترك معه في القاعدة والارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

أمثلة:

١. هرم ثلاثي قائم مساحة قاعدته ٩٩ سم٢ وارتفاعه ١٠ سم.

الحل:

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٩٩ × ١٠ = ٣٣٠ سم^{٣}.

٢. هرم رباعي طول ضلع قاعدته (١٠) سم، وارتفاعه (٢١) سم.

الحل:

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

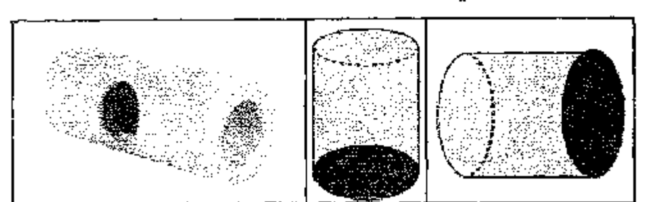
= $\frac{١}{٣}$ × ١٠ × ١٠ × ٢١ = ٧٠٠ سم^{٣}.

*** سؤال للحل:**

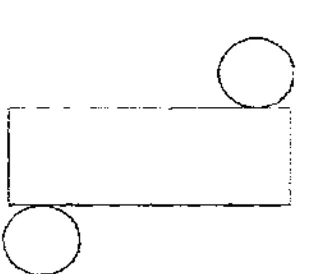
إذا كان طول القاعدة المربعة للهرم الأكبر (هرم خوفو) في القاهرة هو تقريباً ٢٢٠ م، وارتفاعه حوالي ١٣٨ م. فاوجد حجمه.

(٦-١١) الاسطوانة الدائرية القائمة:

لاحظ الأشكال التالية:



إن جميع الأشكال السابقة تتكون من قاعدتين دائريتين متقابلتين متطابقتين ومستطيل يصل بين الدائرتين وتكون الشبكة على الشكل التالي:

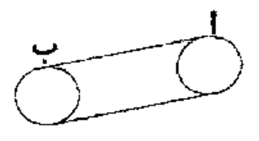


ويسمى هذا الشكل بالأسطوانة الدائرية القائمة.

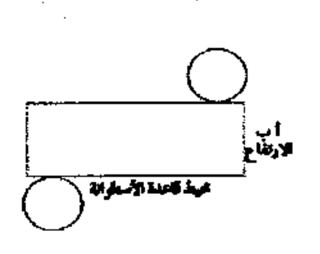
أولاً: مساحة سطح الأسطوانة:

لكي نتمكن من حساب مساحة سطح الأسطوانة الخارجي، نأخذ أسطوانة من الورق الرقيق على شكل أسطوانة دائرية قائمة كما في الشكل المجاور.

قص السطح الجانبي للأسطوانة على طول الخط أ ب، ماذا تلاحظ؟ سوف يكون عندك الشكل التالي:



الشكل الناتج بعد القص هو عبارة عن مستطيل و دائرتين متقابلتين متطابقتين حيث يمثل المستطيل المساحة الجانبية للأسطوانة وتمثل الدائرتان مساحة القاعدتين.والمستطيل الناتج يكون أحد أبعاده ارتفاع الأسطوانة والبعد الآخر هو محيط قاعدة الأسطوانة.



ولإيجاد مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٢π نق × ع وحدة مربعة.

نستنتج مما سبق أن المساحة الجانبية للأسطوانة هي ٢ π نق ع وحدة مربعة.

حيث: نق هو نصف قطر قاعدة الأسطوانة.

ع: ارتفاع الأسطوانة.

π = $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤.

وبعد أن عرفنا المساحة الجانبية بقي علينا أن نعرف مساحة السطح الخارجي للأسطوانة.

إن مساحة السطح الخارجي للأسطوانة هو عبارة عن المساحة الجانبية للأسطوانة بالإضافة إلى مساحة القاعدتين الدائريتين ونعلم أن مساحة الدائرة هي (نق^{٢} π).

مساحة السطح الخارجي = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ (مساحة الدائرة)

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

امثلة

١. جد المساحة الخارجية لأسطوانة دائرية قائمة، نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ٢١ سم.

الحل:

المساحة الخارجية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ (نق^{٢} π)

= ٢π نق ع + ٢ (نق٢ π)

= ٢× $\frac{٢٢}{٧}$ ×٧× ٢١ + ٢ (٧×٧× $\frac{٢٢}{٧}$)

= ٢ × ٢٢ × ٢١ + ٢ × ٧ × ٢٢

= ٢ × ٢٢ (٧ + ٢١) = ٤٤ × ٢٨ = ١٢٣٢ سم^{٢}.

٢. أسطوانة دائرية قطرها ١٠ سم وارتفاعها ١٠ سم. احسب مساحة سطحها الخارجي.

الحل:

المساحة الخارجية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢ × ٣,١٤ × ٥ × ١٠ + ٢ × ٣,١٤ × ٥ × ٥

= ٣,١٤ × ١٠٠ + ٣,١٤ × ٥٠

= ٣١٤ + ٣١,٤ × ٥

= ٣١٤ + ١٥٧,٠ = ٤٧١ سم^{٢}.

٣. خزان وقود أسطواني مغلق، طول نصف قطر قاعدته ٢,٥ م وارتفاعه ١٠ م طلي بدهان من الخارج. جد تكلفة طلاء الخزان إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد (١٠ دنانير).

الحل:

لإيجاد كلفة الدهان الخارجي للخزان يجب إيجاد مساحة السطح الخارجي للخزان.

مساحة السطح الخارجي للخزان = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢ × ٣,١٤ × ٢,٥ × ١٠ + ٢ × ٢,٥ × ٢,٥ × ٣,١٤

= ٥ × ٣١,٤ + ٢ × ٣,١٤ × ٦,٢٥

= ١٥٧ + ٣٩,٢٥ = ١٩٦,٢٥ م^{٢}.

كلفة الدهان = ١٩٦,٢٥م^{٢} × ١٠ دينار = ١٩٦٢,٥ دينار.

ثانياً: حجم الأسطوانة الدائرية القائمة

كثيراً ما نشاهد علب العصير، أو المربى.... قد كتب عليها سعتها (حجم السائل الذي بداخلها). فكيف يمكن حساب حجم الأسطوانة؟

إن حجم الأسطوانة يعتمد على مساحة قاعدة الأسطوانة وارتفاعها حيث أن حجم الأسطوانة هو مساحة القاعدة (الدائرة) مضروباً في ارتفاع الأسطوانة.

وبالرموز حجم الأسطوانة = مساحة قاعدتها × الارتفاع للأسطوانة

= نق^{٢} π × ع = نق^{٢} π ع

أمثلة:

١. جد حجم الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ٧ سم، وارتفاعها ٤ سم.

الحل:

حجم الأسطوانة = نق^{٢} π ع

= ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤ = ٨٨ × ٧ = ٦١٦ سم^{٣}.

٢. قطعة من الورق على شكل مستطيل أبعاده ١٦ سم، ٣٣ سم، لفت الورقة على شكل أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها (٣٣) سم، جد حجم الأسطوانة الناتجة.

الحل:

حجم الأسطوانة = نق^{٢} π ع.

لاحظ هنا أن الارتفاع معلوم وهو (١٦) سم أما نصف القطر غير معلوم، ولكن يمكن إيجاده من محيط القاعدة حيث:

محيط القاعدة = ٢ π نق

٣٣ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق

نق = $\frac{٣٣ × ٧}{٢٢ × ٢}$ = $\frac{٢١}{٤}$

والآن نعود إلى حساب حجم الأسطوانة = $\frac{٢١}{٤}$ × $\frac{٢١}{٤}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٦

= ٣ × ٢١ × ٢٢ = ٦٣ × ٢٢ = ١٣٨٦ سم^{٣}.

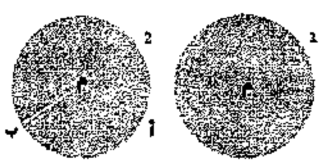
(٦-١٢) المخروط الدائري القائم:



وضع البائع البوشار في لفافة ورقية على الشكل التالي.

ما اسم هذا الشكل؟ وما هو مكوناته؟

إن هذا الشكل يدعى بالمخروط الدائري القائم. وللتعرف على مكوناته دعنا نقوم بالنشاط التالي:



١. أحضر قطعة من الورق على شكل دائرة.

٢. اقتطع من تلك الورقة قطاع دائري كما في الشكل.

٣. لف القطاع حتى ينطبق م أ على م ب ثم الصق م أ مع م ب.

افتح الشكل واجعل قاعدته دائرية تحصل على شكل حجمي هو المخروط.

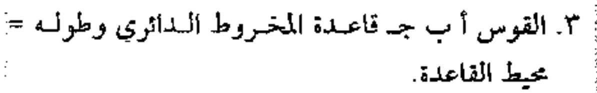
مفاهيم ومصطلحات خاصة بالمخروط:

١. م رأس المخروط.

٢. أ م راسم المخروط وطوله (ل).



٣. القوس أ ب جـ قاعدة المخروط الدائري وطوله = محيط القاعدة.



٤. م د ارتفاع المخروط ويرمز له بالرمز (ع) حيث د مركز الدائرة التي هي قاعدة المخروط

١) حساب مساحة سطح المخروط الدائري القائم الخارجية:

تعلم أن مساحة سطح المخروط الخارجية هي عبارة عن مساحة القطاع الدائري بالإضافة إلى مساحة القاعدة للمخروط الدائري.

ومن هذا نستنتج أن المساحة الخارجية للمخروط:

= مساحة القطاع الدائري + مساحة قاعدة المخروط

= ل نق π + نق^{2} π

حيث ل: طول راسم المخروط. نق: نصف قطر قاعدة المخروط.

☐ أمثلة:

١. احسب المساحة الخارجية للمخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته ٧ سم، وارتفاعه ٢٤ سم.

الحل:

لاحظ أن المخروط الدائري القائم، لا تعرف طول راسمه (ل)، ولكي نتمكن من حساب طول (ل) نستخدم نظرية فيثاغورس حيث.

$ل^٢ = نق^٢ + ع^٢ ـ ل^٢ = (٢٤)^٢ + (٧)^٢$

$ل^٢ = ٤٩ + ٥٧٦ =$

$ل^٢ = ٦٢٥ ـ ل = \sqrt{٦٢٥} = ٢٥$ سم.

والآن نعود لحساب مساحة المخروط الخارجية:

مساحة المخروط الخارجية = مساحة القطاع + مساحة القاعدة

$= ل\ نق\ \pi + نق^٢\ \pi$

$= ٢٥ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧} + ٧ \times ٧ \times \frac{٢٢}{٧}$

$= ٢٥ \times ٢٢ + ٢٢ \times ٧ = ٥٥٠ + ١٥٤ = ٧٠٤$ سم^٢.

٢. مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم، وطول راسمه ٣٠ سم احسب مساحته الخارجية.

الحل:

المساحة الخارجية = مساحة القطاع الدائري + مساحة القاعدة

$= نق\ ل\ \pi + نق^٢\ \pi$

$= ١٠ \times ٣٠ \times ٣,١٤ + ١٠ \times ١٠ \times ٣,١٤$

$= ٣١٤ \times ٣ + ٣١٤ = ٩٤٢ + ٣١٤$

$= ١٢٥٦$ سم^٢.

٢) حجم المخروط الدائري القائم:

لحساب حجم المخروط سوف تقوم بالتجربة التالية:

١. أحضر أسطوانة دائرية قائمة مفرغة من الداخل.

٢. أحضر مخروط دائري قائم له قاعدة الأسطوانة نفسها، ونفس الارتفاع كما في الشكل.

٣. املأ المخروط بالرمل ثم أفرغه في الأسطوانة. وكرر العملية حتى تمتلأ الأسطوانة بالكامل، تلاحظ أنك احتجت إلى ملء المخروط ثلاث مرات وافرغته في الأسطوانة حتى امتلأت وهذا يدل على أن حجم الأسطوانة يساوي ثلاثة أمثال حجم المخروط المشترك معها في القاعدة والارتفاع.

أي أن حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة

= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع.

أمثلة:

١. مخروط دائري قائم يشترك مع أسطوانة دائرية قائمة في الارتفاع ونصف قطر القاعدة. فإذا كان حجم الأسطوانة ٣٣٦٠ سم٣، فكم حجم المخروط؟

الحل:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة المشترك معها بالقاعدة والارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣٣٦٠ = ١١٢٠ سم^{٣}.

٢. مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ١٢ م وارتفاعه ١٥ م.

الحل:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} π ع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ × ١٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٦٠ × ١٢ × ٣,١٤

= ٧٢٠ × ٣,١٤ = ٢٢٦٠,٨ سم^{٣}.

٣. جد طول راسم مخروط قائم، طول نصف قطر قاعدته ١٢ سم، وحجمه ٧٦٨ π سم٣.

الحل:

لإيجاد راسم المخروط يجب أن نعرف ارتفاع المخروط وارتفاع المخروط غير معلوم. ولكن يمكن إيجاده عن طريق حجم المخروط. حيث:

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ نق٢ π ع

١٢×١٢×π ع = ٧٦٨ π ـ ٤٨ π ع = ٧٦٨ π

⇐ ع = $\frac{٧٦٨ \pi}{٤٨ \pi}$ = ١٦ سم.

ثم نعود لحساب طول الراسم ونستخدم نظرية فيثاغورس:

ل٢ = ع٢ + نق٢ ـ ل٢ = (١٦)٢ + (١٢)٢

ل٢ = ٢٥٦ + ١٤٤ = ٤٠٠

ل = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم.

(٦-١٣) الكرة:

مساحة سطح الكرة = ٤ نق٢ π

حجم الكرة $\frac{٤}{٣}$ نق٢ π

أمثلة:

١. أوجد مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها ١٤ سم.

الحل:

مساحة سطح الكرة = ٤ × نق٢ × π

= ٤ × ١٤ × ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$

= ٨ × ١٤ × ٢٢ = ٢٤٦٤ سم٢.

٢. كرة مساحة سطحها ١٢٥٦ سم٢، جد طول نصف قطرها.

الحل:

مساحة سطح الكرة = ٤ نق^{٢} π

= ٤ × ٣,١٤ نق^{٢}

$\frac{١٢٥٦}{٤ \times ٣,١٤}$ = نق^{٢}

$\frac{٣١٤}{٣,١٤}$ = نق^{٢} ـ نق^{٢} = ١٠٠ ـ نق = ١٠ سم.

أمثلة:

١. جد حجم الكرة التي نصف قطرها ١٠ سم.

الحل:

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} π

$\frac{٤}{٣}$ (١٠)^{٣} × ٣,١٤

= $\frac{٤}{٣}$ × ١٠٠٠ × ٣,١٤ = ٣١٤٠ × $\frac{٤}{٣}$

≈ ٤١٨٧ سم^{٣} لأقرب عدد صحيح

٢. كرة حجمها $\frac{٤٣١٢}{٣}$ سم^{٣} اوجد نصف قطرها.

الحل:

٢∙ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} π ⇐ $\frac{٤٣١٢}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} × $\frac{٢٢}{٧}$

⇐ $\frac{٤٣١٢}{٣}$ = $\frac{٤ \times ٢٢ \text{ نق}^{٣}}{٣ \times ٧}$

⇐ نق^{٣} = $\frac{٤٣١٢ \times ٣ \times ٧}{٣ \times ٤ \times ٢٢}$

⇐ نق^{٣} = ٤٩ × ٧ ⇐ نق = $\sqrt[٣]{٤٩ \times ٧}$ = $\sqrt[٣]{٧ \times ٧ \times ٧}$

= ٧ سم.

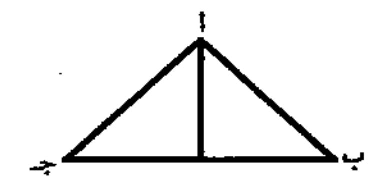
(٦-١٤) ملخص قوانين المحيط والمساحات والحجوم

ملاحظات هامة:

وحدة أي مساحة = وحدة مربعة (سم^{٢}، م^{٢})

وحدة أي محيط او أي طول = وحدة طول (سم، متر)

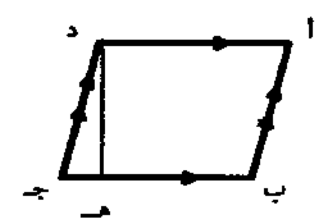
وحدة أي حجم = وحدة مكعبة (سم^{٣}، م^{٣})



المثلث

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

محيط المثلث = أ ب + ب جـ + جـ أ



متوازى الاضلاع

أ ب // د جـ ويساويه

أ د // ب جـ ويساويه

القطران أ جـ ب د متقاطعان وينصف كل منهما الأخر

محيط أ ب جـ د = مجموع الاضلاع = أ ب + ب جـ + جـ د + د أ

مساحة المتوازي الاضلاع = القاعدة × الارتفاع = ب جـ × د هـ

المستطيل

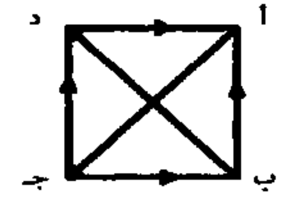
هو نوع من متوازي الاضلاع

إذا كان زواياه قائمة

محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

مساحة المستطيل = الطول × العرض

المربع



هو نوع من متوازي الاضلاع عندما يتساوى ضلعان متجاوران وكانت زواياه قائمة

هو نوع من المستطيلات اذا تساوى ضلعان متجاوران

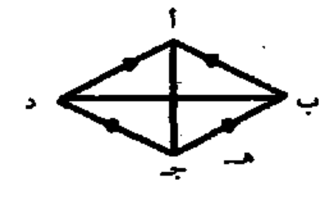
ولذا فهو متساوي الاضلاع

القطران ينصف كل منهما الاخر ومتعامدان

محيط المربع = ٤ × طول الضلع = ٤ ل

مساحة المربع = مربع طول الضلع = ل^{٢}

المعين



هو نوع من متوازي الاضلاع اذا تعامد قطراه وتساوى ضلعان متجاوران القطران متعامدان وينصف كل منهما الاخر وغير متساويان

محيط المعين = ٤ × ل

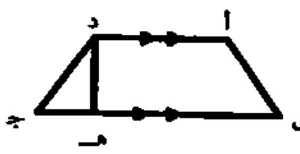
مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطريه = طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × أ جـ × ب د

= طول القاعدة × الارتفاع = ب جـ × أ هـ

شبه المنحرف

محيط شبه المنحرف = أب + ب جـ + جـ د + د أ



مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × مجموع القاعـدتين المتـوازيتين × الارتفـاع = $\frac{١}{٢}$ × (اد + ب جـ)× د هـ

الدائرة



محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π × نق^{٢}

قوانين المساحات والحجوم للمجسمات

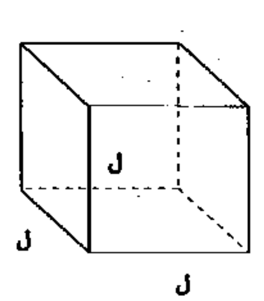
المساحه الجانبيه = محيط القاعده × الارتفاع

المساحه الكليه = المساحه الجانبيه + مجموع مساحتى القاعدتين

لو تخيلنا اى مجسم ونحتاج ان نلون بالفرشاه اى سطح يمكن تلوينه فتكـون هى المساحة الكلية

الحجم = مساحه القاعده × الارتفاع

المكعب



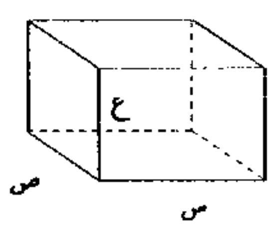
المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢}

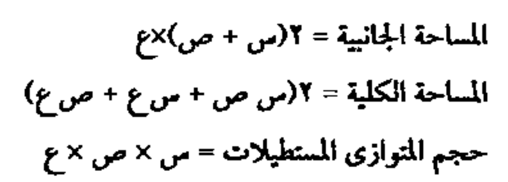
المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}

حجم المكعب = ل^{٣}

حيث ل طول الحرف

متوازى المستطيلات





المساحة الجانبية = ٢(س + ص)×ع

المساحة الكلية = ٢(س ص + س ع + ص ع)

حجم المتوازى المستطيلات = س × ص × ع

الاسطوانة القائمة



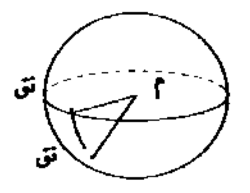
المساحة الجانبية = ٢ π نق × ع

المساحة الكلية = ٢π نق × ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢π نق (ع + نق)

الحجم = π نق^{٢} × ع

الكرة



مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}



المنشور قائم

يعتمد على نوع قاعدته فإن كانت مثلث يسمى منشور ثلاثى قائم قاعدته مربع يسمى منشور رباعى قائم

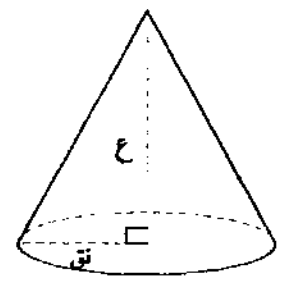
ع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية المساحة الجانبية + مساحتى قاعدتية

حجم المنشور = مساحة القاعدة، الارتفاع

المخروط



المساحة الجانبية = ٢ π نق × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + π نق^{٢}

الحجم = π نق^{٢} × ع

(٦-١٥) وحدات القياس في النظام الأمريكي والإنجليزي

"Imperial units"

(١) وحدات الأطوال:

وتعتمد على البوصة، وهي أصغر الوحدات...

القدم = ١٢ بوصة، الياردة = ٣ أقدام (٣٦ بوصة)، القصبة = ٥,٥ ياردة، الفرلنج = ٤٠ قصبة (٢٢٠ ياردة، أو ٦٦٠ قدم).

الميل (الميل التشريعي) = ٨ فرلنج، أو ١٧٦٠ ياردة، أو ٥٢٨٠ قدماً، الفرسخ = ٣ أميال.

القامة (وحدة قياس عمق المياه) = ٦ أقدام، الكابل (وحدة قياس بحرية) = ١٢٠ قامة

٧٢٠ =قدماً في البحرية الأمريكية.

٦٠٨ =أقداماً في البحرية الإنجليزية.

الميل البحري في إنجلترا = ٦٠٨٠ قدماً.

أما الميل الدولي البحري فإنه = ٦٠٧٦،١ قدماً.

١ =، ١٥ ميل تشريعي.

(٢) وحدات المساحات:

القدم المربع = ١٤٤ بوصة مربعة. الياردة المربعة = ٩ أقدام مربعة = ١٢٩٦ بوصة مربعة.

القصبة المربعة = ٣٠،٢٥ ياردة مربعة. الفدان = ١٦٠ قصبة مربعة = ٤٨٤٠ ياردة مربعة.

الميل المربع = ٦٤٠ فدان.

(٣) وحدات السعة:

أولا: بالنسبة للمواد الجافة كالحبوب:

الكوارت = ٢ باينت، البك = ٨ كوارتات ، البوشل = ٤ بك.

ثانياً: بالنسبة للمواد السائلة:

الجل = ٤ أوقيات سائلة، الباينت = ٤ جل = ١٦ أوقية. الكوارت ٢ باينت = ٣٢ أوقية.

الجالون = ٤ كوارت = ١٢٨ أوقية. البرميل = ٣١،٥ جالون.أما برميل البترول = ٤٢ جالون.

ثالثاً: وحدات الحجوم:

القدم المكعب = ١٧٢٨ بوصة مكعبة. الياردة المكعبة = ٢٧ قدم مكعب.

رابعاً: وحدات الأوزان:

الدرهم = ٢٧،٣٤٤ قمحة، الأوقية = ١٦ درهم ، الرطل = ١٦ أوقية

القنطار = ١٠٠ رطل (في الولايات المتحدة الأمريكية) = ١١٢ رطلا (في بريطانيا).

الطن الأمريكي (الطالوناطة) = ٢٠٠٠ رطل (في الولايات المتحدة الأمريكية) = ٢٢٤٠ رطل (في بريطانيا).

(٤) وحدات القياس في النظام المتري:

المتر = ١٠٠٠ ملليمتر = ١٠٠ سنتمتر = ١٠ ديسمتر.

الديكامتر = ١٠ متر ، الهكتومتر = ١٠٠ متر ، الكيلومتر = ١٠٠٠ متر.

(٥) تحويل الوحدات الأمريكية إلى الوحدات المترية:

تحصل على	تضرب×	الوحدة	تحصل على	تضرب×	الوحدة
متر مربع	٠,٨٣٦١	ياردة مربعة	سنتيمتر	٢,٥٤	بوصة
هكتار	٠,٤٠٤٧	فدان	متر	٠,٠٢٥٤	بوصة
سنتيمتر مكعب	١٦,٣٨٧١	بوصة مكعبة	سنتيمتر	٣٠,٤٨	قدم
متر مكعب	٠,٠٢٨٣	قدم مكعب	متر	٠,٣٠٤٨	قدم
متر مكعب	٠,٧٦٤٦	ياردة مكعبة	متر	٠,٩١٤٤	ياردة
لتر	٠,٩٤٦٤	كوارت	كيلومتر	١,٦٠٩٣	ميل
جرام	٢٨,٣٤٩٥	أوقية	سنتيمتر مربع	٦,٤٥١٦	بوصة مربعة
كيلوجرام	٠,٤٥٣٦	رطل	متر مربع	٠,٠٩٢٩	قدم مربع

ملاحظة: الهكتار هو: وحدة قياس مساحات الأرض

اللتر هو: وحدة لقياس حجم السوائل ويعادل ٠،٢٥ جالون (١٠٠٠ سنتمتر مكعب).

(٦) تحويل الوحدات المترية إلى الوحدات الأمريكية:

تحصل على	تضرب×	الوحدة	تحصل على	تضرب×	الوحدة
ياردة مربعة	١,١٩٦	متر مربع	بوصة	٠,٣٩٣٧	سنتيمتر
فدان	٢,٤٧١	هكتار	قدم	٠,٠٣٢٨	سنتيمتر
بوصة مكعبة	٠,٠٦١	سنتيمتر مكعب	بوصة	٣٩,٣٧٠١	متر
قدم مكعب	٣٥,٣١٤٧	متر مكعب	قدم	٣,٢٨٠٨	متر
ياردة مكعبة	١,٣٠٨	متر مكعب	ياردة	١,٠٩٣٦	متر
كوارت	١,٠٥٦٧	لتر	ميل	٠,٦٢١	كيلومتر
أوقية	٠,٠٣٥٦	جرام	بوصة مربعة	٠,١٥٥	سنتيمتر مربع
رطل	٢,٢٠٤٦	كيلوجرام	قدم مربع	١٠,٧٦٣٩	متر مربع

أسئلة نهاية الوحدة السادسة

١) جد مساحة المستطيل الذي طولهُ ٥سم وعرضهُ ٤سم؟

مساحة المستطيل = ٥ × ٤ = ٢٠

محيط المستطيل = ٢ س + ٢ ص

= ٢ × ٥ + ٢ × ٤ = ٨ + ١٠ = ١٨

٢) جد محيط ومساحة الدائرة التي نصف قطرها ٦سم؟

محيط الدائرة = ٢ × π × نق

= ٢ × ١١ × ٦

= ١٢ π

المساحة = π × نق^{٢}

= π × (٦)^{٢} = ٣٦ π سم^{٢}

٣) جد مساحة المثلث الذي طول قاعدتهُ ٨سم وارتفاعهُ ٥سم

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ سم × ٥ سم

= ٢٠سم^{٢}

٤) إذا كان مساحة المربع ٢٥سم جد طول ضلعهُ

مساحة المربع = $\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥}$

س = ٥

٥) جد محيط ومساحة الأشكال المرسومة تالية:

(١)

٤سم

١٠سم

= ٢ س + ٢ ص

محيط المستطيل = ٤ × ٢ + ١٠ × ٢

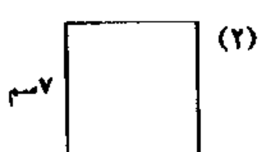
= ٢٨

مساحة = س × ص

= ٤ × ١٠

= ٤٠

(٢)



محيط المربع = ٤ × س

= ٤ × ٧

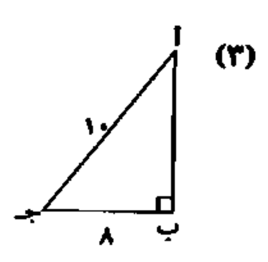
= ٢٨سم

مساحة المربع = س^{٢}

= (٧)^{٢}

= ٤٩سم^{٢}

(٣)



حسب نظرية فيثاغورس = (الضلع الأول)^{٢} + (الضلع الثاني)^{٢}

(١٠)^{٢} = (٨)^{٢} + (أ ب)^{٢}

١٠٠ = ٦٤ + (أ ب)^{٢}

١٠٠ – ٦٤ = (أ ب)^{٢}

$\sqrt{(أ ب)^{٢}}$ = $\sqrt{٣٦}$

أ ب = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

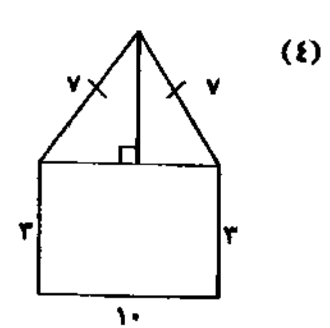
(١) محيط المثلث = مجموع أضلاعه

المحيط = ٨ + ٦ + ١٠ = ٢٤سم

(٢) المساحة = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦ = ٢٤سم^{٢}

(٤)



المحيط = ٣ + ٣ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٣٠سم

المساحة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$$= ٣ \times ١٠ + \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٥$$

$$= ٣٠ + ٢٥ = ٥٥سم^{٢}$$

٦) متوازي أضلاع ارتفاعه ١٢ سم وطول قاعدته ١٦ سم، فما مساحته؟ (١٩٢سم^{٢})

٧) مثلث طول قاعدته ٣,٥ سم و ارتفاعه ٨ سم، فما مساحته؟ (١٤,٠ سم^{٢})

٨) شبه منحرف ارتفاعه ١٠ سم و طولي قاعدتيه ٤سم، ٦سم، فما مساحته؟ (٥٠ سم^{٢})

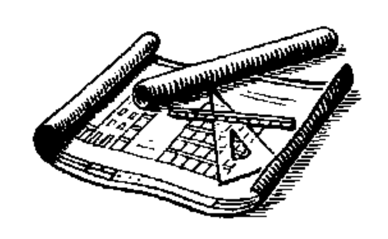
٩) دائرة نصف قطرها ١٤م، فما محيطها وما مساحتها؟ (٨٨سم)، (٦١٦سم^{٢})

١٠) منشور ثلاثي ارتفاعه ١١سم، وقاعدته مثلثة طولها ٤٤سم و ارتفاعها ٦سم، فما حجمه؟ (١٣٢سم^{٣}) (١٣٢سم^{٣})

١١) ما حجم كأس عصير أسطواني الشكل ارتفاعه ٧سم و قطر قاعدته ٥سم؟ (١٣٧,٥سم^{٣})

الوحدة السابعة

الإنشاءات الهندسية



الوحدة السابعة
الإنشـاءات الهندسـية

(٧-١) مقدمة

عرف موضوع الإنشاء الهندسي منذ القدم، ولذا يسميه البعض الإنشاء الإقليدي. وهدفنا هنا ليس تناول تاريخه، وإنما نودّ التركيز على تقديم أهم النماذج والنظريات المتعلقة بالإنشاءات الهندسية، سيما تلك التي تتم بالفرجار دون المسطرة أو بالمسطرة دون الفرجار.

كيف يتمّ الإنشاء الهندسي؟ إنه يتم بالمسطرة والفرجار؟ يمكن تلخيص ذلك في الحالات التالية:

١. إنشاء مستقيم يصل بين نقطتين معلومتين. يتم ذلك بالمسطرة.

٢. إنشاء دائرة نصف قطرها معلوم، وكذا مركزها. يتم ذلك بالفرجار.

٣. تحديد تقاطع دائرتين مركزاهما معلومان، وكذا نصفا قطريهما. يتم ذلك بالفرجار.

٤. تحديد تقاطع دائرة ومستقيم معطى بنقطتين. يتم ذلك بالفرجار والمسطرة.

٥. تحديد تقاطع مستقيمين كل واحد منهما معطى بنقطتين. يتم ذلك بالمسطرة.

ومن المعلوم أن المسطرة لا تستخدم إلا لرسم الخطوط المستقيمة، فهي لا تستخدم في هذا المجال لقياس الأطوال مثلا.

أما الفرجار فهو أداة رسم الدوائر وأقواسها لا غير. ولا يجوز استخدام فتحة الفرجار مثلا لقياس أو نقل الأطوال.

وباختصار يمكن القول إن:

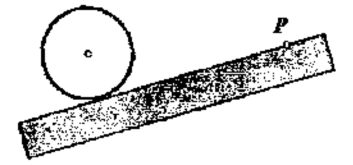
- الفرجار يفيدنا في تساوي المسافات بين نقاط، إذ أن جميع النقاط الواقعة على دائرة تبعد بنفس المسافة عن مركز الدائرة.

- المسطرة تفيدنا في وصل النقاط بخطوط مستقيمة، أي بتحديد كافة النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع نقطتين معلومتين.

ذلك ما يسمى بالإنشاء الهندسي منذ عهد الإغريق. وبطبيعة الحال فإن لكل من الأدوات الهندسية الأخرى (الكوس والمنقلة، المسطرة المدرجة) دورا يؤديه في الرسم الهندسي، لكن استخدام هذه الأدوات في الإنشاء الهندسي غير مسموح به حتى إن سهّل علينا كثيرا إنجاز الرسومات وأراحنا من عناء البحث عن الأطوال وقياسات الزوايا.

سنتناول مثل هذه الإنشاءات التي تستخدم المسطرة والفرجار معا، أو تستعمل الفرجار دون المسطرة، أو المسطرة دون الفرجار. لكن قبل ذلك دعنا نشير إلى بعض الأخطاء شائعة في الإنشاء الهندسي:

خطأ ١: هب أن عليك أن تنشئ المستقيم المماس لدائرة يمر بالنقطة المعلومة P كما في الشكل

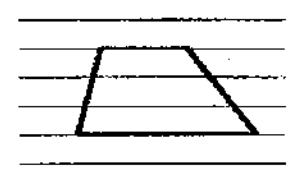


إذا اكتفيت باستخدام المسطرة ووضعتها (كما في الشكل) بحيث تكون ماسة للدائرة، وتمر بالنقطة P، ثم رسمت المستقيم المماس للدائرة، فهذا يعتبر رسما هندسيا وليس إنشاء هندسيا كما يعتقد البعض. ذلك أن نقطة التماس لم تحدد بدقة: هذه الطريقة تحدد تلك النقطة بشكل تقريبي. ولذا فحتى يتحوّل هذا الرسم إلى إنشاء ينبغي تحديد نقطة التماس ثم استخدام المسطرة لوصل هذه النقطة والنقطة P.

خطأ ٢: هب أن عليك أن تنشئ الدائرة المماسة لمستقيم معلوم ذات المركز المعلوم F، كما في الرسم التالي.



إن رسم هذه الدائرة دون تحديد نصف قطرها أو نقطة التماس لا يعتبر إنشاء هندسيا لأن ذلك يؤدي بنا إلى تحديد نقطة التماس بصفة تقريبية.



خطأ ٣: إذا كنت تعمل على ورق مسطر كما في الشكل

وطلب منك رسم شبه منحرف... فإن استخدمت السطور الموجودة على ورقتك لتحديد التوازي (مثلا) فإنك تفقد عندئذ خاصية الإنشاء الهندسي. لماذا؟ لأنك استخدمت أداة أخرى (ليست الفرجار والمسطر) هي السطور المتوازية المرسومة على ورقتك.

> **ملاحظة: يسمح في بعض الإنشاءات الهندسية بأن يعطى نصف قطر دائرة بالمسافة بين نقطتين معلومتين على أن تتاح إمكانية رسم دائرة لها هذا نصف القطر ومركزها خارج النقطتين المعلومتين. هذا الأمر يعتبر تجاوزا لمفهوم الإنشائي الهندسي كما استخدمه الإغريق. ذلك أنهم كانوا يعتبرون أنه عندما ننقل نصف القطر بفتحة الفرجار لرسم الدائرة انطلاقا من مركز آخر فإن فتحة الفرجار قد تتغير دون أن نشعر وبذلك يتغير نصف القطر.**

(٧-٢) الإنشاء بالفرجار والمسطرة (حالات بسيطة)

١- إنشاء منتصف قطعة مستقيمة

لنفصل هذا المثال البسيط: لتكن قطعة مستقيمة [XY]

X ———— Y

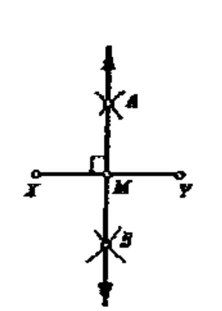
١. ننشئ دائرتين (أو قوسي دائرتين) متساويتي نصف قطر مركزاهما في النقطتين X و Y على أن يكون القطر المشترك للدائرتين أكبر من طول القطعة[XY]. يضمن هذا الشرط وجود تقاطع في نقطتين للدائرتين.

A

X ———— Y

B





٢. تتقاطع الدائرتان (أو القوسان) في النقطتين A وB. نستخدم الآن المسطرة وننشئ المستقيم الذي يصل النقطتين A وB . هذا المستقيم هو محور القطعة $[XY]$.

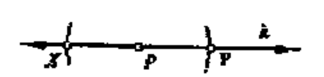
ملاحظة: النقطة M التي تمثل تقاطع المحور مع القطعة المستقيمة $[XY]$ هي منتصف هذه القطعة. ومن ثم فهذا الإنشاء يعين أيضا منتصف قطعة مستقيمة معطاة.

٢- إنشاء مستقيم يعامد مستقيما معلوما عند نقطة معلومة

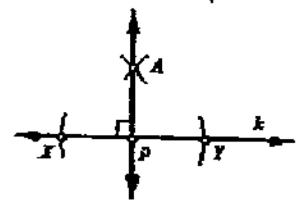
نسمي المستقيم المعطى K و P النقطة الواقعة عليه التي ينبغي أن يمر بها المستقيم المطلوب إنشاؤه.

١. نرسم دائرة مركزها النقطة P فتقطع المستقيم K في نقطتين X و Y:

٢. ننشئ دائرتين مركزاهما X و Y تلتقيان على الأقل في نقطة نسميها A:

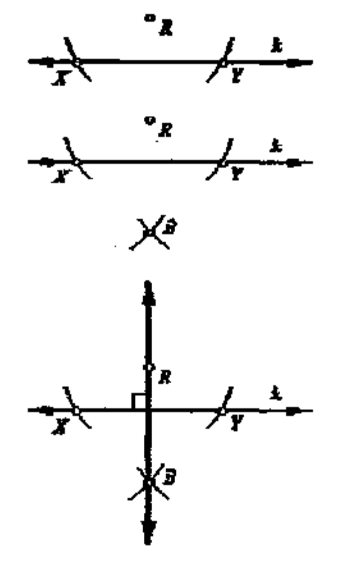


٣. المستقيم المطلوب هو المستقيم (AP).



٣- إنشاء مستقيم يعامد مستقيما معلوما $\underline{K}$ عند نقطة $\underline{R}$ لا تقع على $\underline{K}$

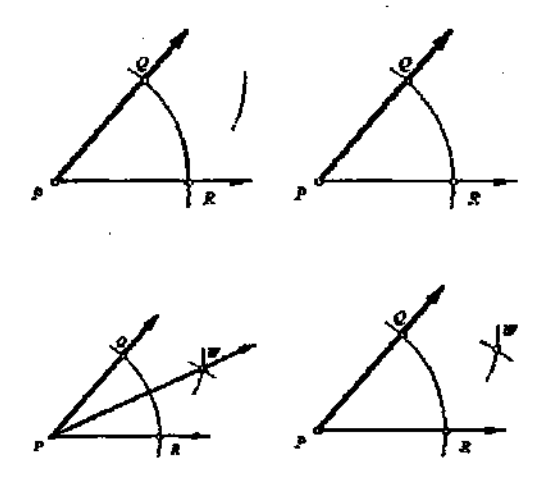
لما كان هذا الإنشاء شبيها بالإنشاء السابق، نكتفي بتوضيح الأشكال الثلاثة المتوالية في الإنشاء:



المستقيم المطلوب هو (BR).

٤- إنشاء منصف زاوية

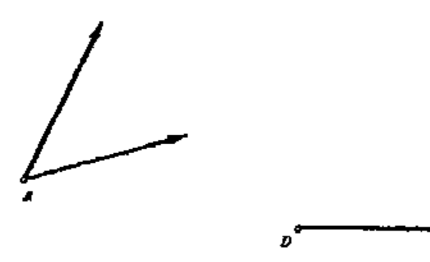
نكتفي بتقديم الإنشاءات المتوالية:



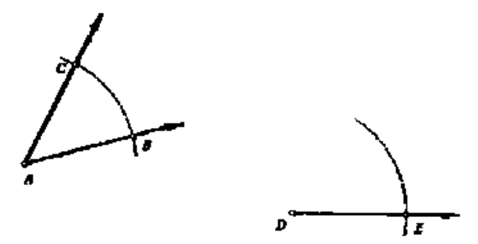
المنصف المطلوب هو نصف المستقيم (PW).

٥- إنشاء زاوية مساوية لزاوية معلومة:

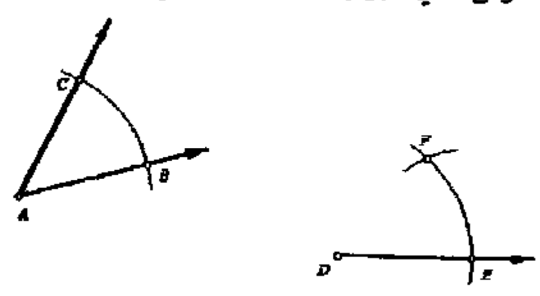
١. نسمي رأس الزاوية المعطاة A، وليكن نصف مستقيم معطى نسمي طرفه D. المطلوب هو إنشاء نصف مستقيم طرفه في D بحيث تكون الزاوية المحصل عليها مساوية للزاوية المعطاة



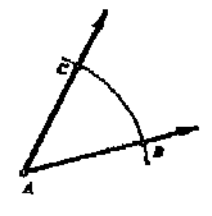
٢. ننشئ دائرة مركزها D تقطع نصف المستقيم المعطى في نقطة نسميها E، وبنفس فتحة الفرجار نرسم قوس الدائرة ذات المركز A فيقطع هذا القوس ضلعي الزاوية في نقطتين نسميهما B و C.

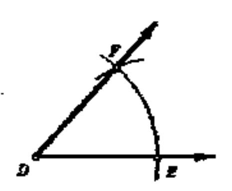


٣. ننشئ النقطة F المحصل عليها بتقاطع الدائرة ذات المركز E ونصف القطر BC مع القوس الذي سبق إنشاؤه (انظر الشكل)



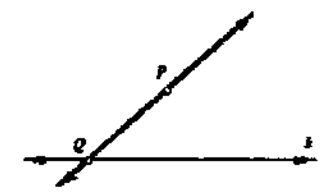
٤. الزاوية EDF المحصل عليها تساوي الزاوية المعطاةBAC.



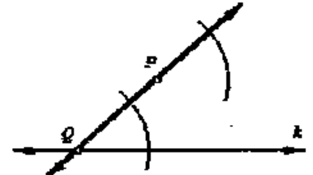


٦- إنشاء مستقيم يمر بنقطة معلومة ويوازي مستقيما معطى

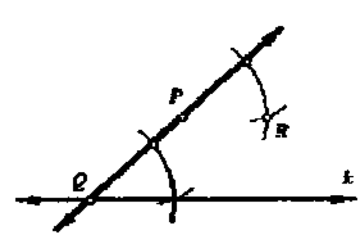
١. نوضح الإنشاءات المتوالية حيث رمزنا بـ k للمستقيم المعطى وبـ P للنقطة المعلومة: نرسم مستقيما كيفيا يمر بالنقطة P فيقطع المستقيم k في نقطةQ.



٢. ننشئ قوسي دائرتين لهما نفس نصف القطر، مركز الأولى في النقطة Q والثانية في النقطة P



٣. لتكن d المسافة بين نقطتي تقاطع القوس الأول مع المستقيمين k و(PQ). نرسم (كما في الشكل) الدائرتين اللتين نصف قطريهما d ومركزاهما نقطتي تقاطع القوسين المرسومين آنفا مع المستقيم (PQ) فنحصل على النقطة R المبيّنة في الشكل.



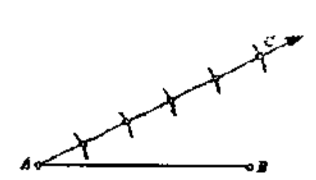


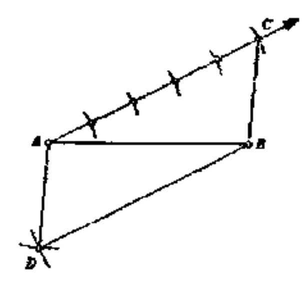
٤. المستقيم (PR) هو المستقيم المطلوب.

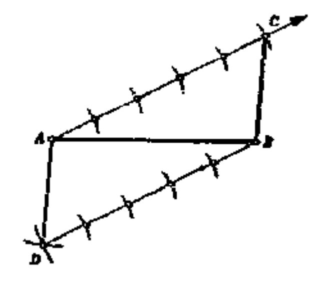
٧- قسمة قطعة مستقيمة معطاة إلى عدد معلوم من المرات

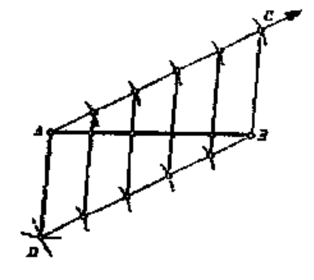
نطلب من القارئ أن يستخلص طريقة الإنشاء من الأشكال المتوالية التالية:

A ——————— B



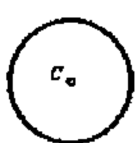


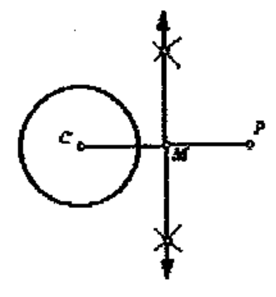




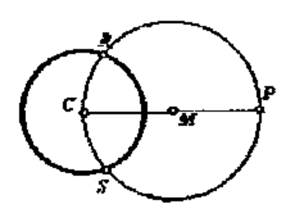
٨- إنشاء المماسين لدائرة معطاة (مع مركزها) المارين من نقطة معلومة P خارج الدائرة.

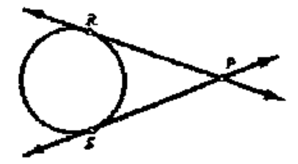
استخلص خطوات الإنشاء من الأشكال التالية:





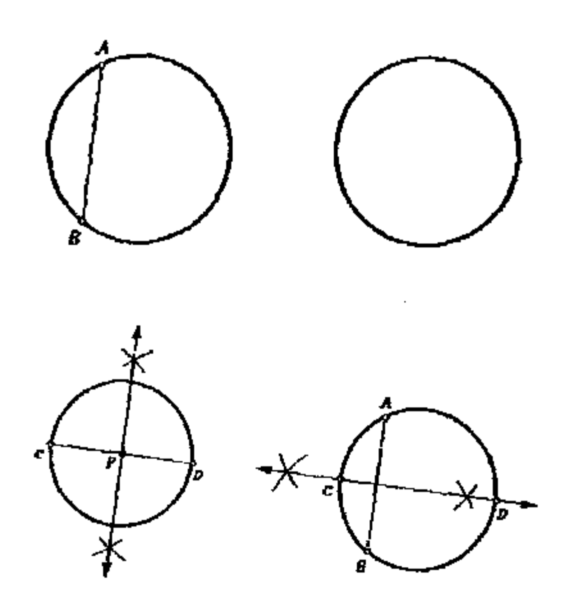
نلاحظ أن M هي منتصف القطعة $[PC]$.





٩- إنشاء مركز دائرة

الأشكال المتوالية المطلوبة في الإنشاء هي:



(٧-٣) الإنشاء بالفرجار دون المسطرة

لم يكتف المهندسون بهذا النوع من الإنشاء، بل راح بعضهم يبحث عن إمكانية إنجاز هذه الإنشاءات بالفرجار وحده بدون الاستعانة بالمسطرة. وفي هذا الإطار كتب الرياضي الإيطالي ماسكروني [١٧٥٠-١٨٠٠] Mascheroni سنة ١٧٩٧ مؤلفًا عنونه "هندسة الفرجار" ترجم إلى عدة لغات مثل الفرنسية والألمانية. وبرهن ماسكروني على النظرية التالية:



نظرية ماسكروني:

كل إنشاء هندسي ينجز بواسطة الفرجار والمسطرة يمكن إنجازها باستخدام الفرجار وحده.

ملاحظة:

ينبغي ألا يفهم من هذه النظرية أننا نستطيع مثلا رسم مستقيم بالفرجار! فهذا من المستحيلات... وإنما المعنى المقصود هو أننا نستطيع تعيين نقطتين من هذا المستقيم باستعمال الفرجار فقط، ومن ثم يحدد المستقيم المطلوب.

والواقع أنه يمكننا اختصار نص هذه النظرية في الجملة التالية:

كل نقطة تمثل تقاطع مستقيمين أو تقاطع دائرة ومستقيم يمكن الحصول عليها كتقاطع دائرتين.

لقد برهن أدلر (Adler) في سنة ١٨٩٠ بطريقة متميّزة على النظرية السابقة، واقترح طريقة عامة لحل مسائل الإنشاء الهندسي بواسطة الفرجار وحده. والجدير بالإشارة أن الرياضي الدنيماركي هجلمسلف (Hjelmslev) عثر، سنة ١٩٢٨، في مكتبة بمدينة كوبنهاغن على كتاب ألّفه جورج موهر (Moher) عنوانه أقليدس الدنيماركي صدر سنة ١٦٧٢ في مدينة أمستردام. ويوجد في الجزء الأول من هذا الكتاب البرهان الكامل على نظرية ماسكروني!

تسمّى الهندسة التي تهتم بالإنشاءات المنجزة بالفرجار وحده هندسة الفرجار. إليك عينة من المسائل الإنشائية التي تتم بالفرجار وبدون استعمال المسطرة... مع الملاحظة أن ترتيبها مهم لأن اللاحق منها يستعمل عموما السابق. نشير أننا اكتفينا بتقديم حلي المسألتين الأخيرتين ١٠ و ١١: إنشاء منتصف قطعة مستقيمة ومركز دائرة.

ملاحظات:

١. لعلك تتساءل الآن عما إذا كان بالإمكان تحديد مركز الدائرة باستخدام المسطرة دون الفرجار؟ لقد أجاب الرياضي الألماني ديفد هيلبرت (١٨٦٢-١٩٤٣) Hilbert: لا يمكن إنشاء مركز دائرة بالمسطرة دون استعمال الفرجار.

٢. من المعلوم أن هناك نوعا آخر من مسائل هندسة الفرجار تتمثل في تقييد فتحة الفرجار... كأن يُطلب منك إنشاء شكل هندسي بالفرجار دون أن تتجاوز أنصاف أقطار الدوائر التي ترسمها فتحة معيّنة مسبقا، أو أن يُطلب منك إنجاز نفس الأشكال بدون أن تقلّ أنصاف الدوائر عن قيمة معلومة. كما يمكن التساؤل عن إمكانية إنجاز إنشاءات هندسية بالفرجار وحده مع تثبيت نصف القطر (أي بتثبيت فتحة الفرجار)! إليك بعض النتائج في هذا الموضوع نوجزها في ٣ حالات:

الحالة الأولى: فتحة الفرجار أصغر من قيمة معلومة

كل الإنشاءات الهندسية التي تنجز بالمسطرة والفرجار يمكن إنجازها بالفرجار (فقط) وبأنصاف أقطار لا تتجاوز طولا معطى مسبقا.

الحالة الثانية: فتحة الفرجار أكبر من قيمة معلومة

كل الإنشاءات الهندسية التي تنجز بالمسطرة والفرجار يمكن إنجازها بالفرجار (فقط) وبأنصاف أقطار أكبر من طول معطى مسبقا.

الحالة الثالثة: فتحة الفرجار ثابتة

من المستحيل إنجاز كل الإنشاءات الهندسية التي تتم بالمسطرة والفرجار باستعمال الفرجار (فقط) وبنصف قطر ثابت معطى مسبقا.

بحث في هذا الموضوع العديد من الرياضيين منهم أبو الوفاء البوزجاني. وهناك مسألة أخرى أكثر تعقيدا مثل: هل يمكن إنجاز جميع الإنشاءات الهندسية التي تتم بالفرجار والمسطرة باستعمال الفرجار (فقط) حيث تمر كل الدوائر المرسومة بنفس النقطة؟ الجواب: نعم، شريطة أن نستثني دائرتين اثنتين... فلا نفرض عليهما المرور بالنقطة أ !

(٧-٤) الإنشاء بالمسطرة دون الفرجار

ألّف الرياضي السويسري (الألماني حسب البعض) شتاينر (١٧٩٦-١٨٦٣) (Steiner) كتابا سنة ١٨٣٣ تحت عنوان "الإنشاءات الهندسية التي تستعمل خطا مستقيما ودائرة ثابتة". وقد بحث الكاتب في الإنشاءات التي يمكن إنجازها بالمسطرة وحدها دون اللجوء إلى الفرجار. تسمى أحيانا الهندسة التي تستخدم المسطر بدون الفرجار "هندسة شتاينر" أو "إنشاءات شتاينر". وكانت أهم نتيجة توصل إليها شتاينر هي النظرية التالية:

نظرية شتاينر

كل إنشاء هندسي ينجز بالفرجار والمسطرة يمكن إنجازه بالمسطرة وحدها، شريطة أن تُعطي دائرة ثابتة في المستوي (أي على الصفحة التي تنجز فيها هذه الإنشاءات).

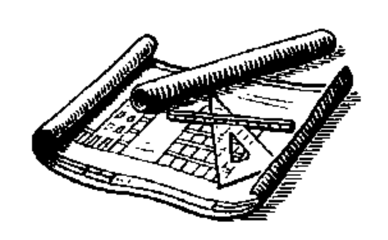
ملاحظة هامة

ينبغي ألا يفهم القارئ من خلال هذا النص أننا نستطيع مثلا رسم دائرة باستعمال مسطرة! فهذا من المستحيلات. والمقصود من هذه النظرية هو أنه بالإمكان الحصول على كل نقطة تقاطع دائرتين أو دائرة ومستقيم كتقاطع مستقيمين شريطة أن ترسم دائرة (واحدة) على الصفحة التي ننجز فيها الإنشاءات.

يبدو أن الرياضي الهولندي فرانس فان سكوتن (١٦١٥-١٦٦١) Schooten F. van هو أول من بحث في حل مسائل الإنشاءات الهندسية بواسطة المسطرة وحدها.

الوحدة الثامنة

القطوع المخروطية



الوحدة الثامنة
القطوع المخروطية

(٨-١) مقدمة

لقد كانت القطوع المخروطية محل اهتمام الرياضيين منذ حوالي ٢٥قرناً. وبذلك نجد في الرياضيات اليوم كمّا هائلاً من النظريات والخواص المتعلقة بهذه الأشكال الهندسية. وقد استفاد الرياضيون والفلكيون وعلماء الفضاء والميكانيكيون من هذه المادة الهندسية الدسمة فحلوا فضلها العديد من المسائل وتعرفوا على مسارات الكواكب وصنعوا أدوات مختلفة تسد حاجياتهم مثل الهوائيات المقعرة والمرايا المحرقة والهوائيات ومصابيح السيارات، الخ.

والقطوع المخروطية تندرج حسب الجبريين ضمن المنحنيات ذات الدرجة الثانية. وكان ديكارت في القرن الـ١٧م قد طبع عليها أدوات الهندسة التحليلية.

أما الرياضيون الإغريق، أمثال مينشيم وأبولنيوس فكانوا أول من انشغلوا بهذه الأشكال وأثبتوا أن القطوع المخروطية الثلاثة تنتسب إلى نفس العائلة رغم أشكالها المختلفة.

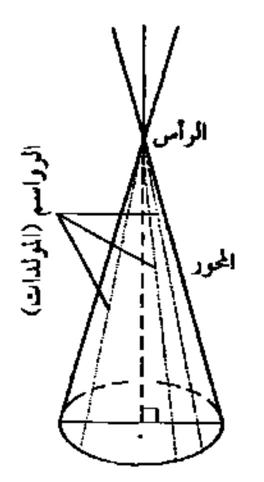
وكان للحضارة العربية الإسلامية دوراً هاماً في مواصلة هذه الدراسات بعد اطلاعهم على الأعمال الإغريقية. ومن العلماء الذين اهتموا بالمخروطات نجد ثابت بن قرة وأبا جعفر الخازن وأبا سهل الكوهي، وابن الهيثم وغيرهم كثيرون.

وقد استفاد الرياضيون والفلكيون وعلماء الفضاء والميكانيكيون من خواص القطوع المخروطية ونتائجها فتمكنوا من حل العديد من المسائل التي كانت عالقة لديهم، واكتشفوا وصنعوا ما لم يكونوا يحلمون به: تعرفوا مثلاً على مسارات الكواكب وصنعوا أدوات مختلفة كالهوائيات المقعرة والمرايا المحدبة ومصابيح السيارات، الخ.

(٨-٢) ما هو المخروط؟

المخروط سطح في الفضاء الثلاثي الأبعاد له العناصر الآتية:

- رأس المخروط.
- محور.
- مستقيمات راسمة (مولدة) (هنا في الشكل) هي المستقيمات التي تصل رأس المخروط بمجموعة نقاط الدليل.



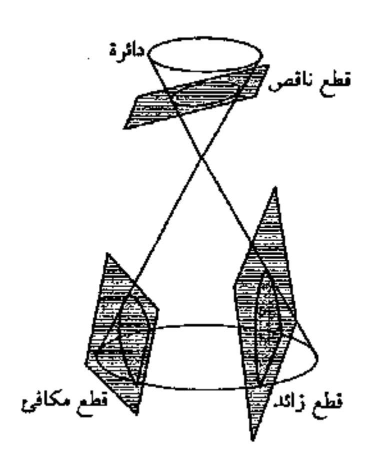
يسمى هذا المخروط مخروطاً قائماً لأن المسقط العمودي لرأس المخروط على المستوى الذي يقع فيه الدليل (الدائرة) هو مركز الدائرة. وهذا هو أبسط المخروطات. والمخروط، في آخر الأمر، هو مجموعة من النقاط في الفضاء التي يشكلها اتحاد الرواسم.

نلاحظ أن الزاوية α التي يكونها المحور مع أي مستقيم راسم زاوية ثابتة عندما يكون المخروط قائماً. لرؤية طريقة من الطرق الكثيرة التي تمكننا من وصف القطوع المخروطية، نعتبر مستوى يقطع المخروط. من الواضح أنه إذا مرّ المستوى القاطع برأس المخروط فإن هناك ثلاثة احتمالات ممكنة فيما يخص تقاطع المستوى مع المخروط:

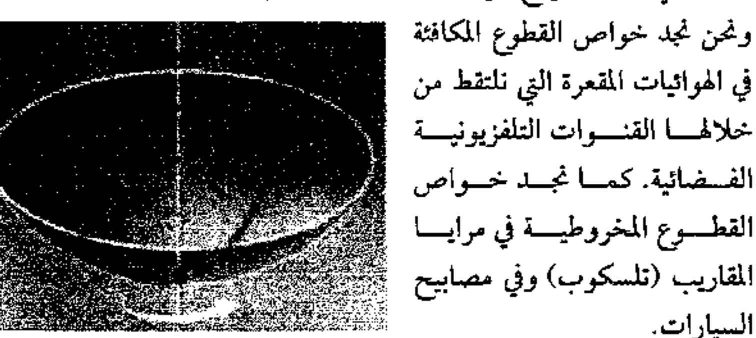
- التقاطع هو اتحاد مستقيمين،
- التقاطع هو مستقيم واحد،
- التقاطع يتمثل في نقطة واحدة هي رأس المخروط.

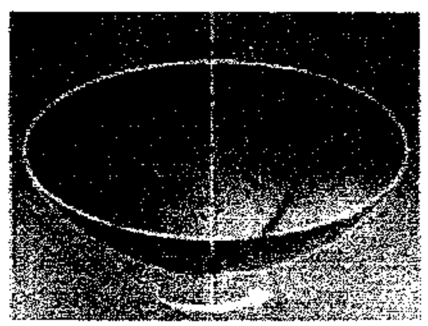
هذه الحالات لا تهمنا هنا في موضوع القطوع المخروطية. ولذا نفترض أن المستوى القاطع لا يشمل رأس المخروط عندئذ نلاحظ أربع حالات ممكنة: وهذه الحالات هي:

١) القطع المكافئ.
٢) القطع الناقص
٣) القطع الزائد
٤) الدائرة.



نهدف من خلال هذه الوحدة إلى تقديم عرض مفصل عن القطوع المخروطات والتذكير ببعض الخواص المتعلقة بهذه الأشكال التي أدت دوراً أساسياً في مختلف فروع الرياضيات، بما فيها الرياضيات التطبيقية. كيف لا ونحن نجد خواص القطوع المكافئة في الهوائيات المقعرة التي نلتقط من خلالها القنوات التلفزيونية الفضائية. كما نجد خواص القطوع المخروطية في مرايا المقاريب (تلسكوب) وفي مصابيح السيارات.

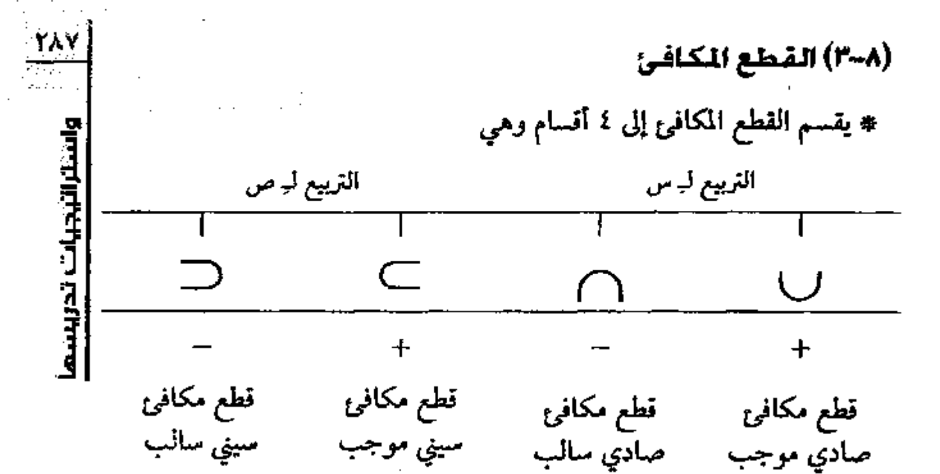




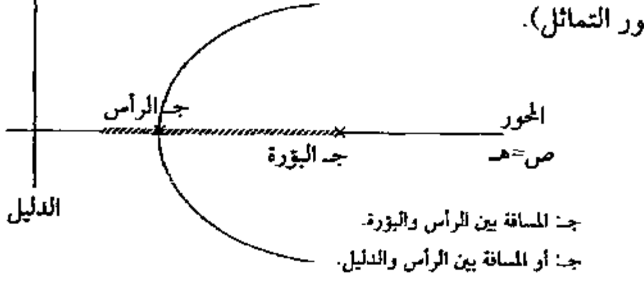
المخروطات الشهيرة هي القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد والدائرة. وقد درست هذه الأشكال بوجه خاص من قبل الإغريق، كما أسلفنا، سيما مينيخيم وأبولنيوس وبابوس Pappus. يمكن تعريف هذه القطوع بعدة طرق لنستعرض ذلك ببعض التفاصيل:

(٨-٣) القطع المكافئ

* يقسم القطع المكافئ إلى ٤ أقسام وهي



* للقطع المكافئ ٤ عناصر وهي:
- الرأس.
- البؤرة.
- المحور (محور التماثل).
- الدليل.

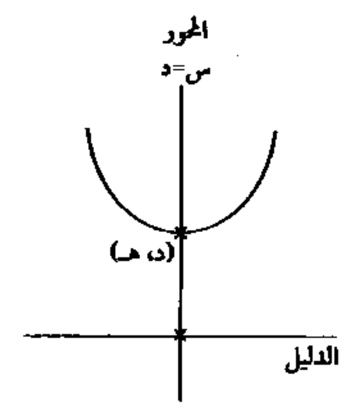


ملاحظة: ❖ المسافة بين البؤرة والدليل=٢جـ

❖ الرأس والبؤرة يقعان على المحور.



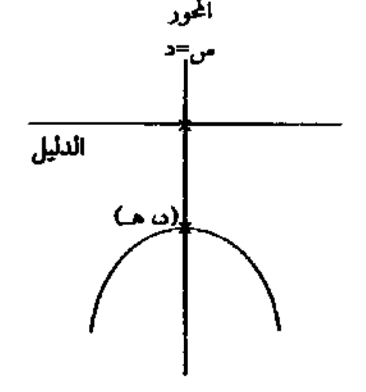
حالات القطع المكافئ:



للأعلى ⇐ التربيع لـِ س وموجب

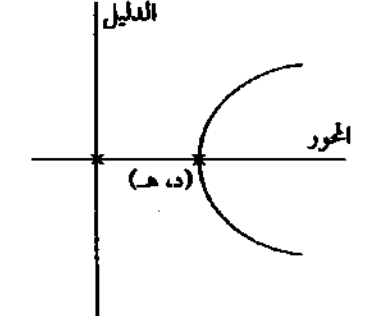
(س−د)^{٢} = ٤جـ(ص−هـ)

المعادلة بالصورة القياسية



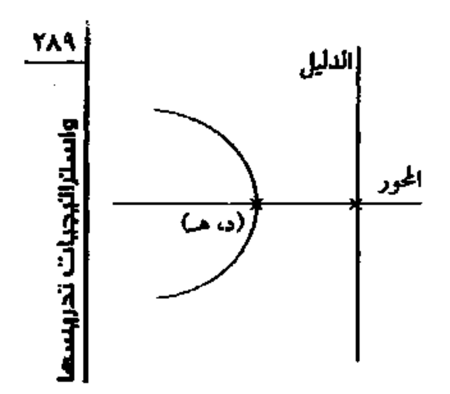
للأسفل ⇐ التربيع لـ س وسالبه

(س−د)^{٢} = −٤جـ(ص−هـ)



لليمين ⇐ التربيع لـِ ص وموجب

(ص−هـ)^{٢} = ٤جـ(س−د)



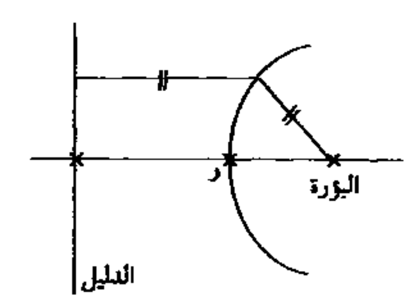
لليسار ⇐ التربيع لِـ ص وسالبه

(ص−هـ)^{٢} = −٤جـ(س−و)

المعادلة بالصورة القياسية

تعريف القطع المكافئ:

هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) يساوي دائماً بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل).



★ سؤال:

قطع مكافئ معادلته: (ص−٢)^{٢} = ٢٤(س+١)

جد:

١.إحداثيات الرأس.

٢.إحداثيات البؤرة.

٣.معادلة المحور.

٤.معادلة الدليل.

الحل:

أولاً: يجب أن نجعل المعادلة بالصورة القياسية وهي كذلك.

ثانياً: من الصورة القياسية نجد: - اتجاه الفتحة.

- الرأس جـ .

- معادلة المحور.

* التربيع لـِ ص وموجب ⟵ لليمين

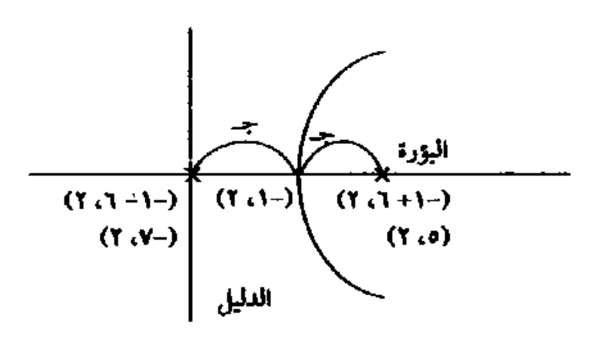
* الرأس (−١، ٢)

* ٤جـ = ٢٤ ⟵ جـ=٦

* معادلة المحور هي صفر الذي له تربيع ص=٢

ثالثاً: نرسم لإيجاد: - البؤرة

- معادلة الدليل



*البؤرة (٥، ٢)

* معادلة الدليل س=−٧

* **سؤال:**

قطع مخروطي معادلته $(٢ س-٦)^{٢} = -٣٢(ص+١)$

جد:

١.احداثيات الرأس

٢.إحداثيات البؤرة

٣.معادلة المحور

٤.معادلة الدليل

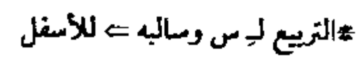
الحل:

أولاً: نحول المعادلة إلى الصورة القياسية

$$(٢ (س-٣))^{٢} = -٣٢ (ص+١)$$

$$\frac{٤}{٤}(س-٣)^{٢} = \frac{-٣٢}{٤}(ص+١)$$

$$\boxed{(س-٣)^{٢} = -٨ (ص+١)}$$ الصورة القياسية



* التربيع لـِ س وسالبه ⇐ للأسفل

* الرأس $(٣، -١)$

* $-٤جـ = -٨ \Leftarrow جـ = ٢$

* معادلة المحور س=٣

* البؤرة (٣،-٣)

* معادلة الدليل ص=١

* **سـؤال:**

قطع مكافئ معادلته ص^{٢}−٢ص+٨س−٤=٠

جد:

١.إحداثيات الرأس　　　٢.إحداثيات البؤرة

٣.معادلة المحور　　　٤.معادلة الدليل

الحل:

أولاً نحول المعادلة إلى الصورة القياسية وذلك بإكمال المربع

*** شرط إكمال المربع هو أن يكون معامل التربيع ١**

خطوات تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية:

* نجعل المتغير الذي فيه تربيع لوحده في الطرف الأيمن ثم نجعل معامل التربيع ١

ص^{٢}−٤ص=−٨س+٤

*نضيف إلى الطرفين $\left(\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right)^{٢}$ إذا كان التربيع لـِ ص أما إذا كـان التربيـع لـِ س نضيف إلى الطرفين $\left(\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right)^{٢}$

ص^{٢}−٤　　=　−٨س+٤　　$\left(\frac{\text{معامل ص}}{٢}\right)^{٢}$　$\left(\frac{−٤}{٢}\right)^{٢}$−٤

ص^{٢}−٤ص+٤ = −٨س+٤+٤

أصبح ↓ مربع كامل

(ص　−　٢)^{٢} =−٨س+٨

جذر الأول　إشارة الأوسط　جذر الأخير

(ص−٢)^{٢} =−٨(س−١)

الصورة القياسية

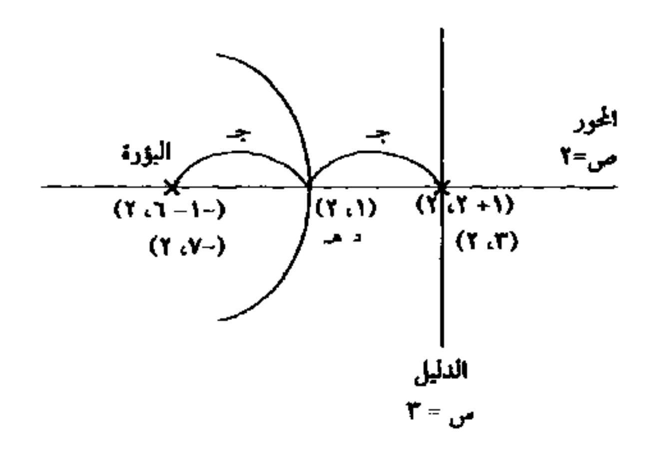
الآن نكمل الحل كما أخذنا سابقاً

* التربيع لـِ ص ←—— لليسار وسالبه

* الرأس (١، ٢)

* −٤جـ = −٨ ⇐ جـ = ٢

* معادلة المحور ص = ٢



* البؤرة (−١، ٢)

* معادلة الدليل س = ٣

الواجب: قطع مكافئ معادلته

س^{2} +٤ص−١٢ص+٢٨=٠

جد:

١. الرأس (−٢،٢)

٢. البؤرة (−٢، ٥)

٣.معادلة المحور س=−٢

٤.معادلة الدليل ص=−١

★ سؤال:

قطع مكافئ معادلته

٨س−٩ص^{٢}+١٨ص−٣٣=٠ جد

١. الرأس .

٢. البؤرة .

٣.معادلة المحور.

٤.معادلة الدليل.

الحل:

−١×−٩ص^{٢}+١٨ص=−٨س+٣٣

٩ ص^{٢} −١٨ص=٨س−٣٣

٩(ص^{٢}−٢ص) = ٨س−٣٣

٩(ص^{٢}−٢ص+١) = ٨س−٣٣+٩

$\frac{١}{٩}$×١ ٩(ص−١)^{٢} = ٨س−٢٤

(ص−١)^{٢} = $\frac{٨}{٩}$ (س−٢)	الصورة القياسية

التربيع لِص وموجبه ⇐ لليمين

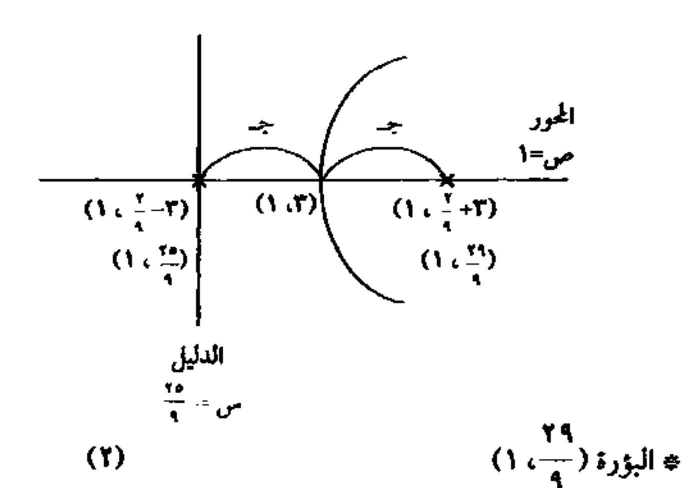
* الرأس (٣، ١) (د، هـ). (١)

$\frac{١}{٤}$ × ١ ٤جـ= $\frac{٨}{٩}$

$\frac{١}{٤}$ × ٤جـ= $\frac{٨}{٩}$ ÷ $\frac{١}{٤}$

$\frac{٢}{٤}$ = جـ

معادلة المحور ص=١ (٣)



* البؤرة ($\frac{٢٩}{٩}$ ، ١) (٢)

* معادلة الدليل س= $\frac{٢٥}{٩}$ (٤)

الواجب

قطع مكافئ معادلته ٦ص= ٤س^{٢} +٨س-٥

جد

١.الرأس (-١، $\frac{-٣}{٢}$)

٢.البؤرة (-١، $\frac{-٩}{٨}$)

٣.معادلة الدليل ص= $\frac{-١٥}{٨}$

٤.إضافي معادلة المحرر س=-١

الواجب

قطع مكافئ معادلته ٤ ص^{٢}–٤س–٨ص=٣

جد

١. الرأس ($\frac{-٧}{٤}$، ١)

٢. البؤرة ($\frac{-٣}{٢}$، ١)

٣. معادلة المحور ص=١.

٤. معادلة الدليل س=–٢

* سؤال:

جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي:

أ. الرأس (٠،٠) ، البؤرة (–٥، ٠)

ملاحظة: لإيجاد معادلة القطع المكافئ تحتاج اتجاه الفتحة لمعرفة التربيع والإشارة والرأس (د، هـ) و(جـ)

الحل:

أ)

الرأس (٠،٠) البؤرة (–٥، ٠)

↑ ↑

الذي ثبت هو المحور

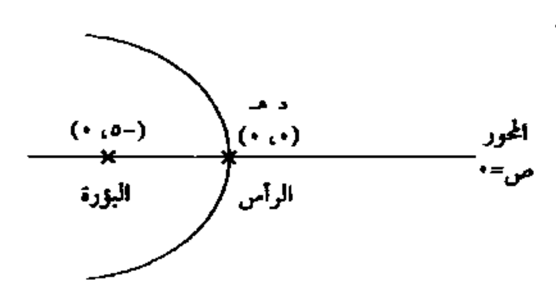
⇐ معادلة المحور ص=٠

* جـ=المسافة بين الرأس والبؤرة

جـ = |٥س|

جـ=٠ - -٥

جـ = ٥



* لليسار ⟵ التربيع لـِ ص وسالبه

المعادلة:

(ص-ص)^{٢} = -٤جـ (س-د)

⟸ (ص-٠)^{٢} = -٤× ٥(س-٠)

ص^{٢}= -٢٠س

ب. الرأس (٣ ، ٢) البؤرة (٣،-١)

↑ ↑

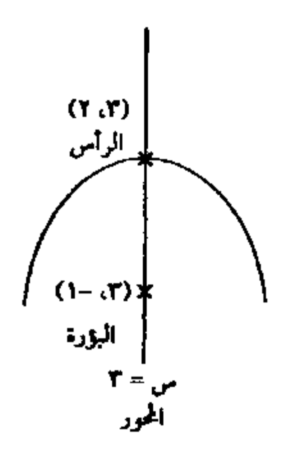
معادلة المحور س=٣ لأن الذي ثبت هو س

* جـ= |ج ص|

جـ=٢ - ١⁻

جـ=٣

للأسفل ⟸ التربيع لـِ س وسالبه



المعادلة:

$(س-د)^٢ = -٤جـ (ص-هـ)$

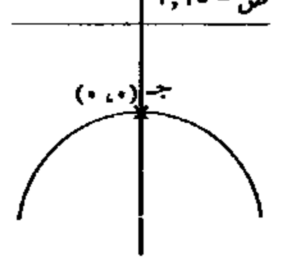
$(س-٣)^٢ = -٤×٣ (ص-٢)$

$(س-٣)^٢ = -١٢ (ص-١٢)$

واجب

جـ) الرأس (-١،١) البؤرة (-٥، -١)

الجواب $(ص+١)^٢ = -١٦(س+١)$



د) الرأس (٠،٠) الدليل ص=١,٢٥

الدليل // محور السينات ⇐ المحور // محور الصادات

جـ = جـ = |٥ص|

جـ = ١,٢٥-٠

المعادلة:

$(س-٠)^٢ = -٤× ١,٢٥(ص-٠)$

$س^٢= -٥ص$

واجب

هـ) الرأس (٢،-٥) الدليل س=-٧

الجواب $(ص+٥)^٢=٣٦(س-٢)$

ز) البؤرة (-٣،١)،   الدليل س=-٥

↓

الدليل عمودي ⇐ المحور أفقي

٢جـ = المسافة بين البؤرة والدليل   س = -٥

٢جـ = |٥س|

٢جـ = -٣- -٥

٢جـ = -٣+ ٥

٢جـ = ٢

جـ =١

الرأس (-٤، ١) (د، هـ)

* لليمين ⇐ التربيع لـ ص وموجبه

المعادلة:

(ص- هـ)^{٢} = ٤جـ (س- د)

(ص-١)^{٢} = ٤×١ (س+٤)

(ص-١)^{٢} = ٤ (س+٤)

واجب

و) البؤرة (٠،٠) معادلة الدليل ص=٦

الجواب $س^{٢} = -١٢(ص-٣)$

*** سؤال:**

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س،ص) في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (-٣، ١) يساوي دائماً بعدها عن المستقيم س=-٥.

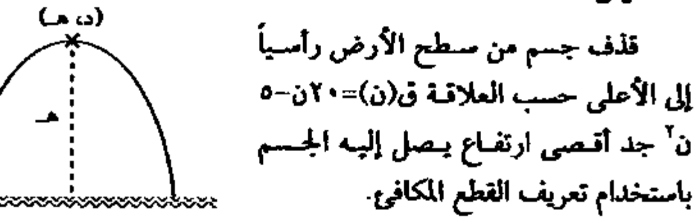
الحل:

إنها معادلة قطع مكافئ بؤرته (-٣، ١) ودليله س=-٥.

والجواب:

$(ص-١)^{٢} = ٤(س+٤)$ لأنه نفس السؤال السابق فرع (ز).

*** سؤال:**



قذف جسم من سطح الأرض رأسياً إلى الأعلى حسب العلاقة $ق(ن)=٢٠ن-٥ن^{٢}$ جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم باستخدام تعريف القطع المكافئ.



الحل:

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو هـ الإحداثي الصادي للرأس

نفرض أن ف(ن) =ص ن=س

$ص=٢٠س-٥س^{٢}$ لإيجاد الرأس نحول المعادلة إلى الصورة القياسية

ص -٢٠س=-ص

$٥(س^{٢}-٤س) =-ص$

$٥(س^{٢}-٤س+٤) =-ص+٢٠$

$٥(س-٢)^٢=-(ص-٢٠)$

$٥(س-٢)^٢ = -\frac{١}{٥}(ص-٢٠)$ الصورة القياسية

⇐ الرأس (٢، ٢٠) (د،هـ)

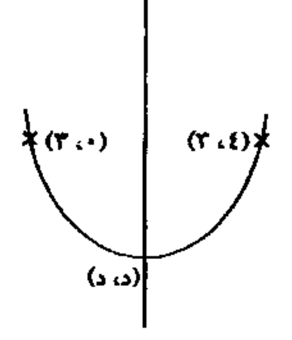
⇐ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض هو ٢٠

* **سؤال:**

جد معادلة القطع المكافئ الذي

* محوره // محور الصادات
* رأسه يقع على المستقيم ص=س
* يمر بالنقطتين (٤، ٣)، (٠، ٣)

الحل:



بما أن الرأس يقع على المستقيم ص=س

⇐ إحداثيات الرأس (د، د)

نفرض أنه للأعلى

⇐ التربيع لِـ س وموجب

$(س-د)^٢ = ٤جـ(ص-د)$

$(\underset{س}{٤}، \underset{ص}{٣})$ تحقق ⇐ $(٤-د)^٢=٤جـ(٣-د)$ (١)

$(\underset{س}{٠}، \underset{ص}{٣})$ تحققه ⇐ $د^٢ = ٤جـ (٣- د)$ (٢)

$(١) \div (٢) \Leftarrow \frac{(٤-د)^٢}{د^٢} \times ١$

$(٤-د)^٢=د^٢$

$١٦-٨د+ د^٢= د^٢$

١٦−٨د+ د^{٢}− د^{٢} = ٠

١٦ = ٨د

د = ٢

من (٢) ⇐ ٤=٤ جـ (٣−٢)

٤=٤جـ

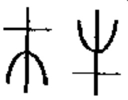
جـ=١

المعادلة: (س−٢)^{٢} = ٤(ص−٢)

حالة خاصة:

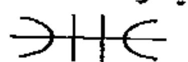
معادلة القطع المكافئ الذي يمر بـ ٣ نقاط

أ) إذا كان للأعلى أو للأسفل



المعادلة: ص=أس^{٢}+ب س+ جـ أ ≠ ٠

ب) إذا كان لليمين أو لليسار



المعادلة س=أص^{٢} + ب ص + جـ، أ ≠ ٠.

★ سؤال:

جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره // محور السينات

ويمر بـ (٣، ١)، (٦، ٣)، (٣، −٣)

المحور

المحور

إنه لليمين أو لليسار

المعادلة: س=أ ص^{٢}+ ب ص+ جـ أ ≠ ٠.

س=أ ص^{٢} + ب ص+ جـ

(٣، ١) تحققه ⇐ ٣= أ + ب+ جـ (١)

(٦، ٣) تحققه ⇐ ٦= ٩أ+ ٣ب + جـ (٢)

(٣، –٣) تحققه ⇐٣= ٩أ–٣ب + جـ (٣)

(١) – (٢) ⇐ –٣ = –٨أ –٢ب (٤)

(١) – (٣) ⇐ ٠ = –٨أ + ٤ب (٥)

٣ = ٨أ + ٢ب

٠ = –٨أ + ٤ب +

٣ = ٦ب

ب = $\frac{١}{٢}$

من (٥) ⟵ ٠= –٨أ +٤× $\frac{١}{٢}$

٨أ = ٢

أ = $\frac{١}{٤}$

من ١ ⇐ ٣ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١ \times ٢}{٢ \times ٢}$ + جـ

٣ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٤}$ + جـ

٣ = $\frac{٣}{٤}$ + جـ

جـ = $\frac{٩}{٤}$

المعادلة: $س = \frac{١}{٤} ص^{٢} + \frac{١}{٢} ص + \frac{٩}{٤}$

الواجب

جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله // محور السينات ويمر بـ (٣، ٢)، (٦، ١)، (٠، ١)

الجواب: $ص = -\frac{١}{٩} س^{٢} + \frac{٢}{٣} س + ١$

★ سؤال:

تتحرك نقطة و (س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث أن موقعها في اللحظة ن ≤ ٠ يتحدد بالمعادلتين:

$$س = جتا ن - جا ن \qquad ص = جا ٢ن$$

جد معادلة هذا المسار، ثم بين نوع هذا المسار

المطلوب علاقة بين س، ص ومعرفة ماذا تمثل المعادلة (قطع مكافئ، قطع زائد، خط مستقيم، وهكذا).

الحل

$س^{٢} = (جتا ن - جا ن)^{٢}$

$س^{٢} = جتا^{٢}ن - ٢جان جتا ن + جا^{٢}ن$

$س^{٢} = ١ - جا ٢ ن$

$\boxed{س^{٢} = ١ - ص}$ معادلة المسار

إنها معادلة قطع مكافئ لأن هناك تربيع وحيد

فكرة:

قطع مكافئ معادلته:

$٤ \times \frac{ص^{٢}}{٤} - \frac{٣ص}{٢} - ٢س = \frac{٧}{٤}$ جد إحداثيات الرأس

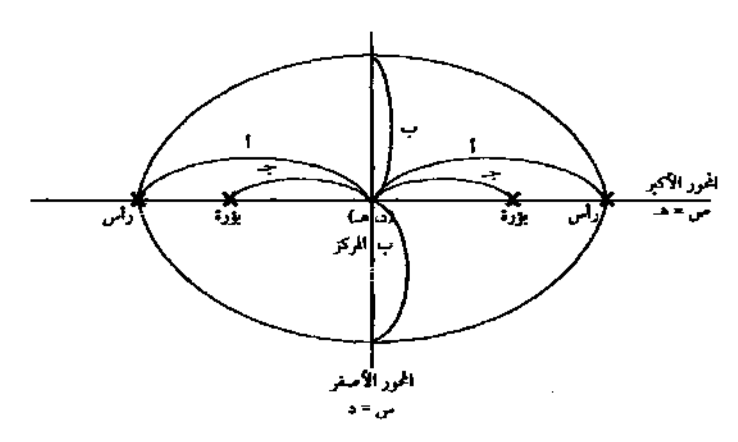
$ص^{٢} - ٦ص - ٨س = ٧$ ثم نكمل الحل

الجواب: (−٢، ٣)

(٨-٤) القطع الناقص

له حالتان:

حالة (١) قطع ناقص سيني (المحور الأكبر ∥ محور السينات)



* المركز (د، هـ).
* الرأسان: طرفا المحور الأكبر.
* الرأسان والبؤرتان تقعان على المحور الأكبر.
* أ: هي المسافة بين المركز والرأس.

* جـ: هي المسافة بين المركز والبؤرة.

*ب: هي المسافة بين المركز وطرفي المحور الأصغر.

*طول المحور الأكبر=٢أ.

*طول المحور الأصغر = ٢ب.

*البعد البؤري = ٢جـ

* أ دائماً أكبر من ب وأكبر من جـ

لكن قد يكون - ب > جـ

- ب < جـ حسب السؤال

- ب = جـ

*العلاقة بين أ، ب، جـ: جـ^{٢}= أ^{٢} - ب^{٢}

* الاختلاف المركزي = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ دائماً أقل من ١ لأن جـ < أ

* معادلة القطع الناقص السيني بالصورة القياسية:

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

ملاحظات على الصورة القياسية

♦معامل س، معامل ص، الطرف الأيسر دائماً ١

♦الإشارة +

♦ أ^{٢} (العدد الأكبر) تحت السينات لأنه سيني

حالة ٢. قطع ناقص صادي (المحور الأكبر محور الصادات)

المعادلة بالصورة القياسية

$$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$$

العدد الأكبر ($\text{أ}^{٢}$) تحت الصادات لأنه صادي

ملاحظة:

(حيث أن ٢٥ هي $\text{أ}^{٢}$ و ٩ هي $\text{ب}^{٢}$)

- $\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٩} = ١$ قطع ناقص سيني لأن العدد الأكبر تحت السينات
- $\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٢٥} = ١$ قطع ناقص صادي لأن العدد الأكبر الصادات
- $\frac{(٢\text{س} - ٦)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٩}$ هذه المعادلة ليست بالصورة القياسية

$\Leftarrow \frac{(٢(\text{س} - ٣))^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٩} = ١$

($\text{ب}^{٢} = ٤$، $\text{أ}^{٢} = ٩$)

$\frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص} + ١)^{٢}}{٩} = ١$ قطع ناقص صادي لأن العدد الأكبر تحت الصادات

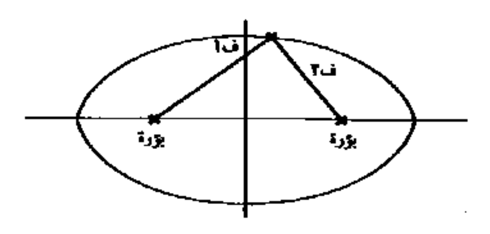
- $٣\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} = ١٢$

$\frac{٣\text{س}^{٢}}{١٢} + \frac{٤\text{ص}^{٢}}{١٢} = \frac{١٢}{١٢}$ قطع ناقص سيني

◆ $٣س^٢+٤ص^٢=١$

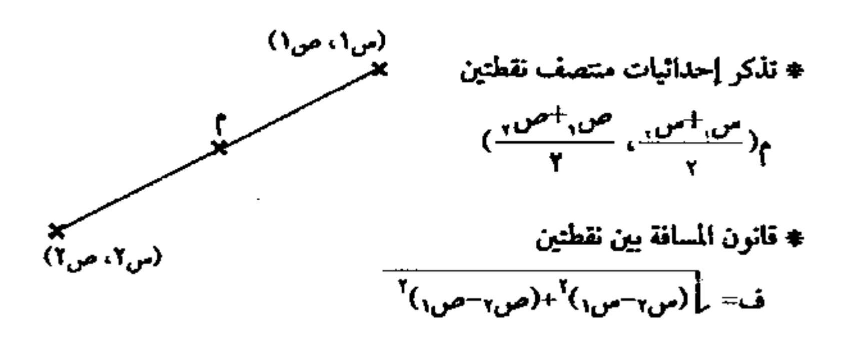
$\frac{س^٢}{\frac{١}{٣}}+\frac{ص^٢}{\frac{١}{٤}}=١$ ($أ^٢=\frac{١}{٣}$، $ب^٢=\frac{١}{٤}$) قطع ناقص سيني

◆ **تعريف القطع الناقص:**



$ف_١+ف_٢=٢أ$

هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي دائماً مقداراً ثابتاً (٢أ).



* تذكر إحداثيات منتصف نقطتين

$م\left(\frac{س_١+س_٢}{٢}،\ \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

* قانون المسافة بين نقطتين

$ف=\sqrt{(س_٢-س_١)^٢+(ص_٢-ص_١)^٢}$

*** سؤال:**

قطع ناقص معادلته: $١٦س^{٢}+٩ص^{٢}-٦٤س+٥٤ص+١=٠$

جد

١) إحداثيات المركز (٧علامات).

٢) الاختلاف المركزي (٣علامات).

الحل:

أولاً: يجب أن نحول المعادلة إلى الصورة القياسية

$$١٦س^{٢}-٦٤س+٩ص^{٢}+٥٤ص+١=٠$$

$$١٦(س^{٢}-٤س)+٩(ص^{٢}+٦ص)=-١$$

$$١٦(س^{٢}-٤س+٤)+٩(ص^{٢}+٦ص)=-١+٦٤+٨١$$

$$١٦(س-٢)^{٢}+٩(ص+٣)^{٢}=١٤٤ \quad (١٦\times ٩=١٤٤)$$

$$\frac{١٦(س-٢)^{٢}}{١٦\times ٩}+\frac{٩(ص+٣)^{٢}}{٩\times ١٦}=١٤٤$$

$$\boxed{\frac{(س-٢)^{٢}}{٩}+\frac{(ص+٣)^{٢}}{١٦}=١}$$ قطع ناقص صادي لأن الأكبر صادي

↓ الصورة القياسية

المركز (٢، -٣)

* $أ^{٢}=١٦ \leftarrow أ=٤$

* $ب^{٢}=٩ \leftarrow ب=٣$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$جـ^٢ = ٧ \leftarrow جـ = \sqrt{٧}$

الاختلاف المركزي $= \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٧}}{٤}$

إضافي: في السؤال السابق جد

٣) الرأسين ٤) البؤرتين ٥) طرفا المحور الأصغر

٦) معادلة المحور الأكبر ٧) طول المحور الأكبر ٨) معادلة المحور الأصغر

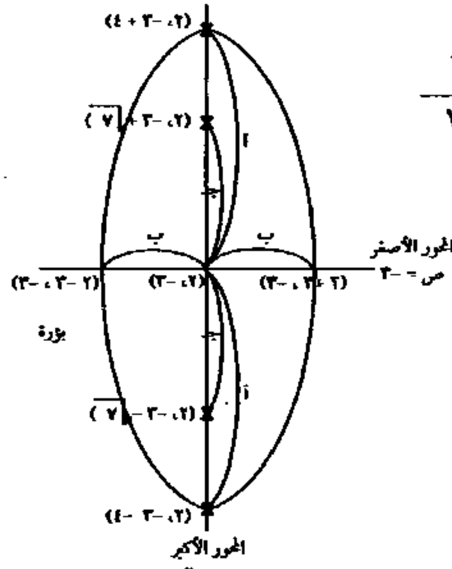
٩) طول المحور الأصغر ١٠) البعد البؤري

الحل:

٧) طول المحور الأكبر $=٢أ=٨$

٩) طول المحور الأصغر$=٢ب=٦$

١٠) البعد البؤري$=٢جـ= ٢\sqrt{٧}$



٣) الرأسان (٢، ١)، (٢، -٧)

٤) البؤرتان (٢، -٣ ∓ $\sqrt{7}$)

٥) طرفا المحور الأصغر (٥،-٣)، (-١، -٣)

٦) معادلة المحور الأكبر س=٢

٨) معادلة المحور الأصغر ص = -٣

★ سؤال:

قطع ناقص معادلته

س^{٢}+٤ص^{٢}+٦س=٢٣+٨ص، جد

١) المركز ٢) الرأسين

٣) البؤرتين ٤) الاختلاف المركزي

الحل:

أولاً نحل المعادلة إلى الصورة القياسية

س^{٢}+٦س+ ٤ص^{٢} -٨ص= ٢٣

(س^{٢}+ ٦س) +٤(ص^{٢}-٢ص) =٣٢

(س^{٢}+٦س+٩)+٤(ص^{٢} -٢ص +١) = ٢٣+٩+٤

$$\frac{(س + ٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٩} = \frac{٣٦}{٣٦} = ١$$

❋ (أ^{٢}=٣٦، ب^{٢}=٩)

$$\frac{(س - ٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٩} = ١$$ (الصورة القياسية) قطع ناقص سيني

لأن العدد الأكبر تحت السينات

١) المركز (-٣، ١) (د،هـ)

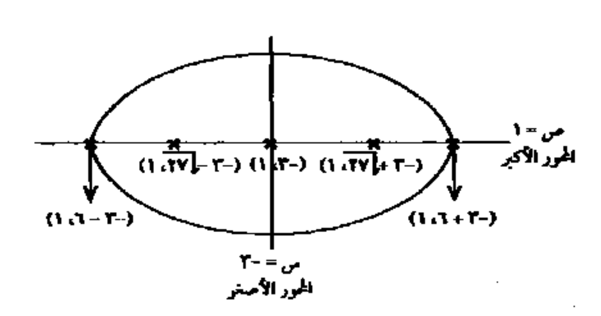
أ^{٢}=٣٦ ⇐ أ=٦

ب^{٢} =٩ ⇐ ب=٣

جـ^{٢}= أ^{٢} - ب^{٢}

جـ^{٢} = ٢٧ ⇐ جـ = $\sqrt{٢٧}$

٤) الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٢٧}}{٦}$



٢) الرأسين (٣، ١)، (−٩، ١)

٣) البؤرتين (−٣ ∓ $\sqrt{٢٧}$ ، ١)

الواجب

٩س^{٢} + ٤ص^{٢} + ١٨س = ٨ص + ٢٣، جد

١) المركز (−١، ١)

٢) الرأسين (−١، ٤)، (−١، −٢)

٣) البؤرتين (−١، ١ ∓ $\sqrt{٥}$)

٤) طرفا المحور الأصغر (١، ١) (−٣، ١)

٥) معادلة المحور الأكبر = س = −١

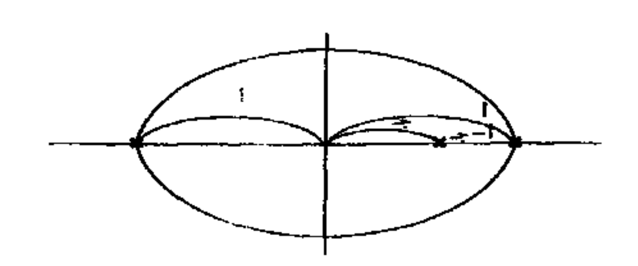
٦) الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

٧) طول المحور الأصغر = ٢ب = ٤

٨) البعد البؤري = ٢جـ = ٢ $\sqrt{٥}$

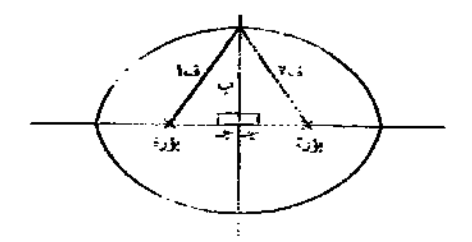
ملاحظات هامة:

١.



* أقل مسافة بين القطع الناقص والبؤرة هي المسافة بين البؤرة والرأس القريب = أ−جـ
* أبعد مسافة بين القطع الناقص والبؤرة هي المسافة بين البؤرة والرأس البعيد = أ +جـ

. لإثبات أن جـ٢ = أ٢ −ب٢



باستخدام تعريف القطع الناقص ⟸ ف١ +ف٢ = ٢أ

باستخدام نظرية فيثاغورس ⟸ $\sqrt{ب^٢+جـ^٢}$ + $\sqrt{ب^٢+جـ^٢}$ =٢أ

⟸ ٢ $\sqrt{ب^٢+جـ^٢}$ = ٢أ

⟸ $\sqrt{ب^٢+جـ^٢}$ =أ

بتربيع الطرفين ⟸ ب٢ + جـ٢ = أ٢

⟸ جـ٢ = أ٢ −ب٢

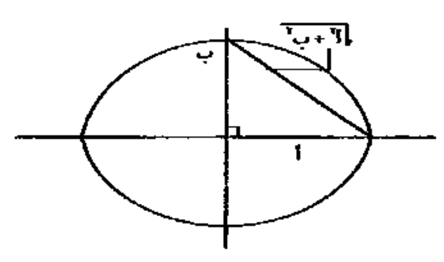
٣.

محيط المثلث = مجموع الأضلاع

= ف١ + ف٢ + البعد بين البؤرتين

= ٢أ + ٢جـ

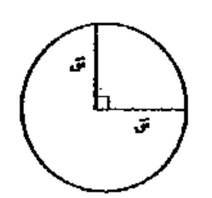
٤.



المسافة بين طرفي المحور الأكبر والمحور الأصغر يساوي $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

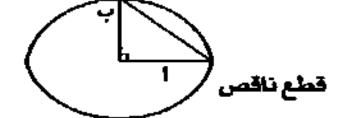
٥. مساحة الدائرة = π × نق×نق

= π × نق^٢



دائرة

مساحة القطع الناقص = π × أ × ب



قطع ناقص

٦. إذا أعطي السؤال الرأسين نستطيع إيجاد ٣ أشياء وهي

* نوع القطع (نوع القطع هو الذي تغير)
*المركز وهو إحداثيات المتصف
* أ ملاحظة: المسافة بين الرأسين ٢أ

مثال:

قطع ناقص رأساه (١، ٥)، (٧، ٥)

* نستطيع إيجاد

١) نوع القطع سيني لأن الذي تغير هو السينات

٢) المركز $(\frac{١+٧}{٢}\text{، }٥) = (\frac{٨}{٢}\text{، }٥) = (٤\text{، }٥)$

٣) ٢أ = ٧-١
٢أ = ٦
أ = ٣

٧. إذا أعطي السؤال البؤرتين نستطيع إيجاد ٣ أشياء

* نوع القطع (نوع القطع هو الذي تغير)
* المركز وهو إحداثيات المتصف
* جـ ملاحظة المسافة بين البؤرتين =٢جـ

٨. إذا أعطي السؤال طرفا المحور الأصغر نستطيع إيجاد ٣ أشياء

١) نوع القطع (نوع القطع هو الذي لم يتغير)
٢) المركز وهو إحداثيات المتصف
٣) ب ملاحظة المسافة بين طرفي المحور الأصغر =٢ب

٩. لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج

١) نوع القطع (لمعرفة أين نضع $أ^٢$)

٢) المركز (د، هـ)

٣) $أ^٢$، $ب^٢$.

* سؤال:

جد معادلة القطع الناقص في كل من الحالات التالية:

أ) الرأسان (٣، ٠)، (-٣، ٠)، طول المحور الأصغر = ٤. ٢ب=٤ ب=٢

* نوع القطع سيني لأن الذي تغير هو السينات.

* المركز $(\frac{٣+-٣}{٢}، ٠) = (٠،٠)$ (د،هـ)

* ٢أ= ٣، -٣

٢أ =٦

أ=٣

المعادلة:

$$\frac{(س-د)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} = ١$$

$$\frac{(س-٠)^٢}{٩} + \frac{(ص-٠)^٢}{٤} = ١$$

$$\frac{س^٢}{٦} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$$

ب) الرأسان (٠، ٥) (٠، −٥) البؤرتان (٠، ٢)، (٠، −٢)

* نوع القطع صادي

* ٢جـ=٢− −٢

٢جـ= ٤

جـ =٢

* المركز $(٠، \frac{٥+−٥}{٢}) = (٠،٠)$

* ٢أ = ٥− −٥   جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢}

٢أ = ١٠   ٤ = ٢٥−ب^{٢}

أ = ٥   ب^{٢} = ٢١

المعادلة:

$$\frac{(ص-هـ)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(س-د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

$$\frac{(ص-٠)^{٢}}{٢٥} + \frac{(س-٠)^{٢}}{٢١} = ١$$

$$\frac{ص^{٢}}{٢٥} + \frac{س^{٢}}{٢١} = ١$$

جـ) البؤرتان (٤، −٢) (١٢، −٢) الرأسان (١٣، −٢)

٢أ=١٣−٣

٢أ=١٠

أ=٥

* سيني

* المركز $(\frac{٤+١٢}{٢}، −٢) = (٨، −٢)$ (د،هـ)

* ٢جـ= ١٢-٤

٢جـ=٨

جـ=٤

* $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$16 = 25 - ب^2$

$ب^2 = 9$

المعادلة: $\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$

$$\frac{(س - 8)^2}{25} + \frac{(ص + 2)^2}{9} = 1$$

د) البؤرتان (٥، ١) (-١، ١)، طول المحور الأكبر =٨

٢أ =٨ أ=٤

* سيني

* المركز $(\frac{5 + -1}{2} ، 1)$

(٢،١)
د هـ

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$9 = 16 - ب^2$

$ب^2 = 7$

المعادلة :

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$$

$$\frac{(س-٢)^٢}{١٦} + \frac{(ص+١)^٢}{٧} = ١$$

هـ) البؤرتان (١، ٢)، (٥، ٢)

وطول المحور الأكبر= ٦ أمثال البعد البؤري

٢أ = ٦× ٢جـ

الحل:

* سيني

* المركز $(\frac{١+٥}{٢}، ٢)$

(٣،٢)

* ٢جـ=٥-١

٢جـ==٤

جـ=٢

* ~~٢~~أ = ٦× ~~٢~~جـ

أ=٦جـ

أ=٦×٢

أ=١٢

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$٤ = ١٤٤ - ب^٢$

$ب^٢ = ١٤٠$

المعادلة: $\frac{(س-٣)^٢}{١٤٤} + \frac{(ص-٢)^٢}{١٤٠} = ١$

و) الرأسان (−٤، ٠)، (٤، ٠)، يمر بالنقطة (٢، ٣)

* سيني
* المركز (د، هـ)
* المعادلة $\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$

$$\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$$

$(٢، ٣)$ تحقق ⇐ $\frac{٤}{١٦} + \frac{٩}{ب^2} = ١$

$$\frac{١}{٤} + \frac{٩}{ب^2} = ١$$

$$\frac{٩}{ب^2} = \frac{٣}{٤}$$

$$٣ب^2 = \frac{٩ \times ٤}{٣}$$

$$ب^2 = ١٢$$

$$\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{١٢} = ١$$

ز) الرأسان (٣، −١٠)، (٣، ٨) والاختلاف المركزي = $\frac{٢}{٣}$

الحل:

* صادي
* المركز $(٣، \frac{-١٠ + ٨}{٢})$

$(٣، \frac{-٢}{٢})$

(٣،-١) (د، هـ)

* ٢أ=٨-⁻١٠

٢أ=١٨

أ=٩

الاختلاف المركزي = $\frac{٢}{٣}$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{جـ}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٣جـ=١٨

جـ=٦

* $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$٣٦ = ٨١ - ب^{٢}$

$ب^{٢} = ٤٥$

* المعادلة: $\frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

$\frac{(ص - ١)^{٢}}{٨١} + \frac{(س - ٣)^{٢}}{٤٥} = ١$

ح) طرفا المحور الأصغر (٣، ٠)، (-٣، ٠) ويمر بالنقطة (٢، ٣)

الحل:

* صادي لأن الذي لم يتغير هو الصادات * ب=٣ * المركز (٠،٠)

المعادلة: $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2}+\frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2}=1$

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2}+\frac{\text{س}^2}{9}=1$$

(٢،٣) تحقق $\Leftarrow \frac{9}{\text{أ}^2}+\frac{4}{9}=1$

$$\frac{9}{\text{أ}^2}=\frac{5}{9}$$

$$\text{أ}^2=\frac{81}{5}$$

$$\frac{\text{ص}^2}{\frac{81}{5}}+\frac{\text{س}^2}{9}=1$$

* **سؤال:**

قطع ناقص بؤرتاه $\text{ب}_1(4، 0)$، $\text{ب}_2(-4، 0)$ والنقطة و (س، ص) تقع على منحناه بحيث أن محيط المثلث وب_1 ب_2 يساوي ٢٤، جد معادله.

الحل:

* سيني
* المركز (٠،٠)
* جـ = ٤

محيط المثلث=٢أ +٢جـ

٢٤=٢أ+٨

١٦=٢أ

أ=٨

* $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$١٦ = ٦٤ - ب^2$

$ب^2 = ٤٨$

* المعادلة:

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$$

$$\frac{س^2}{٦٤} + \frac{ص^2}{٤٨} = ١$$

* سؤال:

تتحرك النقطة و (س،ص) في المستوى حسب:

س=٥+٣جاهـ ص=٢+٢جتاهـ

الحل:

س-٥ =٣جا هـ ص-٢=٢جتاهـ

$$\frac{س-٥}{٣} = جاهـ \qquad \frac{ص-٢}{٢} = جتاهـ$$

$جا^2هـ = جتا^2 هـ$

$$\frac{(س-٥)^2}{٩} + \frac{(ص-٢)^2}{٤} = ١$$

إنها معادلة قطع سيني

* سؤال:

جد نصف قطرة الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص

$$\frac{س^2}{٨١} + \frac{ص^2}{١٦} = ١ \quad (أ^2=٨١،\ ب^2=١٦)$$

الحل:

م الدائرة = م القطع الناقص

π نق^{٢} = π × أ × ب

π نق^{٢} = π × ٩ × ٤

π نق^{٢} = ٣٦ π

نق^{٢} = ٣٦

نق = ٦

*** سؤال:**

قطع ناقص مساحته ٢٠ π الرأسان (-٥،٠)، (٥،٠)، جد معادلته

* أ = ٥

* المركز (٠،٠)

* سيني

م = ٢٠ π

π × أ × ب = ٢٠ π

أ × ب = ٢٠

٥ × ب = ٢٠

ب = ٤

* المعادلة: $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

$\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$

واجب:

النقطة ن(س،ص) واقعة على منحنى قطع ناقص مساحته ٢٠ π طول محور الأصغر=٨، بؤرتاه ب١،ب٢ جد محيط المثلث ن ب١،ب٢ الجواب محيط المثلث=٢أ+٢جـ

=١٠+٦

=١٦

٭ سؤال:

جد الاختلاف $\frac{جـ}{أ}$ المركزي لقطع ناقص إذا كان طول المحور الأكبر= ضعف طول المحور الأصغر

٢أ = ٢×٢ب

أ=٢ب ⇐ $\frac{أ}{٢}$ = ب

جـ^{٢} = أ^{٢}−ب^{٢} نحتاج علاقة بين أ، جـ

جـ^{٢}= $\frac{٤×أ^{٢}}{٤×١}$ − $\frac{أ^{٢}}{٤}$

جـ^{٢}= $\frac{٣أ^{٢}}{٤}$ ⇐ $\frac{جـ^{٢}}{أ^{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$

$\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ الاختلاف المركزي

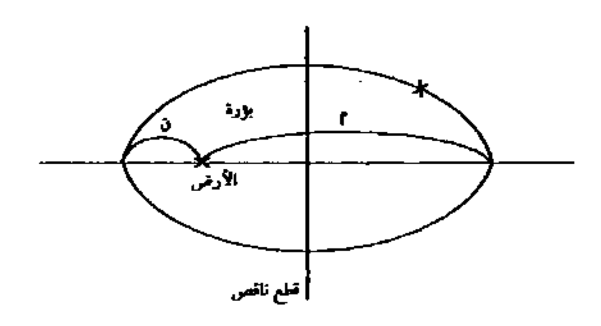
واجب:

جد الاختلاف المركزي لقطع ناقص إذا كان البعد بين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي المحور الأكبر والأصغر.

الجواب= $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{١٧}}$

* سؤال:

يدور القمر حول الأرض حسب الشكل



إذا كانت أطول مسافة بين القمر والأرض =م

أقصر مسافة بين القمر والأرض =ن

أثبت أن الاختلاف المركزي= $\frac{م - ن}{م + ن}$

الحل :

أ+جـ=م	أ+جـ=م
+	−
أ−جـ=ن	أ−جـ=ن
٢أ= م+ن	٢جـ=م−ن
$أ = \frac{م + ن}{٢}$	$جـ = \frac{م - ن}{٢}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} \Leftarrow = \frac{\frac{م - ن}{٢}}{\frac{م + ن}{٢}} \Leftarrow = \frac{م - ن}{م + ن}$

م،ن نقطتان ماديتان، النقطة م تدور على شكل قطع ناقص بحيث تكون في إحدى بؤرتي هذا القطع إذا كان طول المحور الأكبر =١٠ ٢

أ = ١٠

أ = ٥

الاختلاف المركزي= ٠,٣

$\frac{جـ}{أ}$=٠,٣ ⇐ $\frac{جـ}{٥}$=٠,٣ ⇐ جـ=١,٥

جد

أ) أقصر مسافة بين النقطتين م، ن= أ-جـ =٥-١,٥ =٣,٥

ب) أبعد مسافة بين م، ن = أ+جـ =٥+١,٥ =٦,٥

الواجب

قطع ناقص بؤرتاه (٤، $\sqrt{٦}$ ، ١)، (-٤ $\sqrt{٦}$ ، ١) وطول المحور الأكبر=٢٨

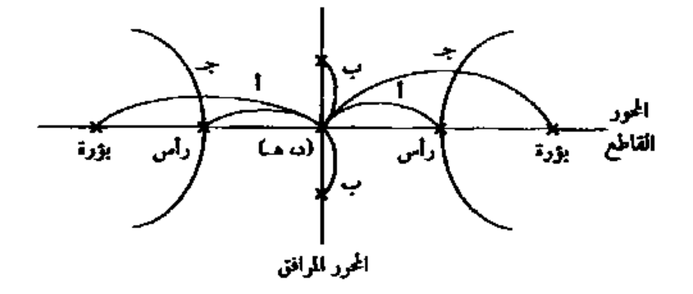
جد معادلته

الجواب : $\frac{س^٢}{١٩٦} + \frac{(ص - ١)^٢}{١٠٠} = ١$

(٨-٥) القطع الزائد

له حالتان

حالة ١ـ قطع زائد سيني (المحور القاطع // محور السينات)



* جـ هي الأكبر لكن قد يكون أ > ب

أ < ب

أ = ب

* $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$
* الاختلاف المركزي= $\frac{جـ}{أ}$ دائماً أكبر من ١
* طول المحور القاطع=٢أ
* طول المحور المرافق = ٢ب
* البعد البؤري =٢جـ
* المعادلة بالصورة القياسية

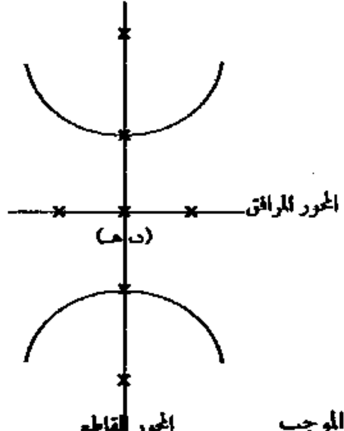
$$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

* الموجب للسينات لأنه سيني * $أ^{٢}$ تحت الموجب

حالة ٢) قطع زائد صادي (المحور القاطع // محور الصادات)

المعادلة:

$$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$



* الموجب للصادات لأنه صادي * $أ^{٢}$ تحت الموجب

(أ^{٢}=٤ ب^{٢}=٩)

* $\frac{(س-١)^{٢}}{٤}-\frac{(ص-٣)^{٢}}{٩}=١$ قطع زائد سيني لأن الموجب للسينات

(أ^{٢}=٩ ب^{٢}=٤)

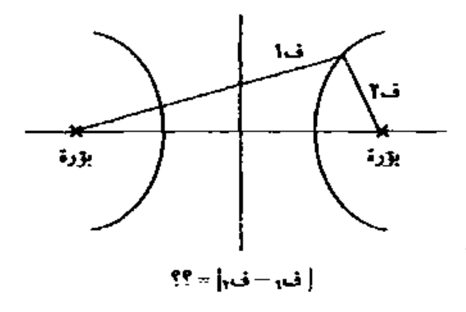
* $\frac{(س-١)^{٢}}{٤}-\frac{(ص+٣)^{٢}}{٩}=١$ قطع ناقص صادي لأن العدد الأكبر تحت الصادات

-١×١ س^{٢}-ص^{٢}= ١$^{-}$

(أ^{٢}=١ ب^{٢}=١)

$\frac{ص^{٢}}{١}+\frac{س^{٢}}{١}=١$ قطع زائد صادي لأن الموجب للصادات

تعريف القطع الزائد



| ف$_{١}$ – ف$_{٢}$| = ؟؟

هو المحل الهندسي تتحرك في المستوى بحيث يكون: الفرق المطلق لبعديهما عن نقطتين (البؤرتين) ثابتين يساوي دائماً مقداراً ثابتاً (٢أ)

* **سؤال:**

قطع زائد معادلته ٩س^{٢}-١٨س=٤ص^{٢}+٨ص+٣١

جـ:

١) الرأسان ٢) البؤرتان

٣) طول المحور القاطع ومعادلته. ٤) الاختلاف المركزي

الحل:

$$٩س^٢-١٨س-٤ص^٢-٨ص=٣١$$

$$٩(س^٢-٢س)-٤(ص^٢+٢ص)=٣١$$

$$٩(س^٢-٢س+١)-٤(ص^٢+٢ص+١)=٣١+٩-٤$$

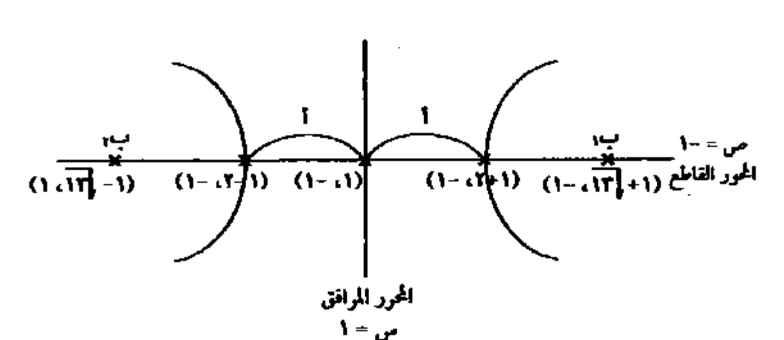
$$\frac{٩(س-١)^٢}{٩\times٤}-\frac{٤(ص+١)^٢}{٩\times٤}=\frac{٣٦}{٣٦}$$

$$\frac{(س-١)^٢}{٤}-\frac{(ص+١)^٢}{٩}=١$$ الصورة القياسية

* سيني لأن الموجب للسينات
* $أ^٢=٤ \longrightarrow أ=٢$
* $ب^٢=٩ \longrightarrow ب=٣$
* $جـ^٢= أ^٢=ب^٢$

$جـ^٢= ١٣ \longrightarrow جـ=\sqrt{١٣}$

* المركز: (١، -١)



١) الرأسان (٣، -١)، (-١، -١)

٢) البؤرتان (١، ∓ $\sqrt{١٣}$ ، -١)

٣) طول المحور القاطع =٢أ -٤

معادلة المحور القاطع ص=-١

٤) الاختلاف المركزي $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

إضافي:

٥) طرفا المحور المرافق (١، -١+٣)، (١، -١-٣)

(١، ٢)، (١، -٤)

٦) البعد البؤري = ٢جـ= ٢ $\sqrt{١٣}$

*** سؤال:**

قطع زائد معادلته ٢٥س^{٢}-٧ص^{٢}+١٤، ص=٣٥٧،

جد:

١)المركز ٢) الاختلاف المركزي

٣) معادلة المحور القاطع ٤) البؤرتين

٢٥س^{٢}-٧ (ص^{٢}-٢ص) =٣٥٧

٢٥س^{٢} -٧ (ص^{٢}-٢ص+١ =٣٥٧-٧

$$\frac{\text{٢٥س}^{٢}}{٣٥٠} - \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{٣٥٠} = \frac{٣٥٠}{٣٥٠}$$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{٣٥٠}{٢٥}} - \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{\frac{٣٥٠}{٧}} = ١$$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{١٤} - \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{٥٠} = ١$$ قطع زائد سيني لأن الموجب للسينات

$أ^2 = ١٤ \leftarrow أ = \sqrt{١٤}$

$ب^2 = ٥٠ \leftarrow ب = \sqrt{٥٠}$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$

$جـ^2 = ٦٤ \leftarrow جـ = ٨$

١) المركز (٠، ١) ٢)

٢) الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٨}{\sqrt{١٤}}$

٣) ص=١

٤) البؤرتين (٠+٨،١)، (٠-٨، ١)

(٨، ١)   (-٨، ١)

* سؤال:

جد معادلة القطع الزائد في كل من الحالات التالية:

أ) الرأسان (٠،٣) (-٣، ٠)   طول المحور المرافق=٢

* سيني لأنه الذي يتغير هو السينات   ٢ب=٢   ب=١

* المركز $(\frac{٣ + -٣}{٢}، ٠)$ (٠،٠)

* $\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$

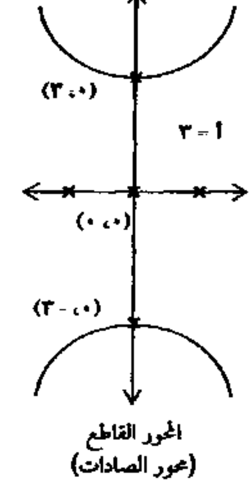
* ٢أ=٣ - -٣

٢أ=٦

أ=٣

المعادلة: $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{١} = ١$

ب) البؤرتان (٠، ٤) (١، −٤) يتقاطع مع محور الصادات في (٠، ٣)، (٠، −٣)



المحور القاطع
(محور الصادات)

* صادي
* المركز (٠، ٠) (د،هـ)
* جـ=٤
* أ=٣
* جـ^{٢}= أ^{٢}+ب^{٢}

١٦ = ٩+ب^{٢}

٧ = ب^{٢}

* $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$
* المعادلة: $\frac{\text{ص}^{٢}}{٩} - \frac{\text{س}^{٢}}{٧} = ١$

ج) الرأسان (٤، −٢)،(١٢،−٢)

*البؤرتان (١٣، −٢) (٣، −٢)

الحل:

*سيني

* المركز ($\frac{٤+١٢}{٢}$،−٢)

($\frac{١٦}{٢}$،−٢)

(٨،−٢)
د هـ

* ٢أ=١٢−٤ 　　　　جـ> أ ⇐ قطع زائد

٢أ=٨

أ=٤

* ٢جـ = ١٣ - ٣

٢جـ = ١٠

جـ = ٥

* جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}

جـ^{٢} = ١٦ + ب^{٢}

ب^{٢} = ٩

* $\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$\frac{(\text{س} - ٨)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} + ٢)^{٢}}{٩} = ١$

د) البؤرتان (٥، ١) (-١، ١)

* سيني

* المركز $\left(\frac{٥ + -١}{٢}، ١\right)$

($٢_{\text{د}}$، $١_{\text{هـ}}$)

* ٢جـ = ٥ - -١

٢جـ = ٦

جـ = ٣

* طول المحور القاطع = ٣

٢أ = ٣

أ = $\frac{٣}{٢}$

* $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

$$٩ = \frac{٩}{٤} + ب^٢$$

$$\frac{٤ \times ٩}{٤ \times ١} - \frac{٩}{٤} = ب^٢$$

$$\frac{٢٧}{٤} = ب^٢$$

$$* \frac{(س - د)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$$

$$\frac{(س - ٢)^٢}{\frac{٩}{٤}} + \frac{(ص - ١)^٢}{\frac{٢٧}{٤}} = ١$$

٭ الواجب:

هـ) * البؤرتان (١، ٢)، (٥، ٢)

* البعد البؤري = ضعف طول المحور القاطع

الجواب

$$\frac{(س - ٣)^٢}{١} - \frac{(ص - ٢)^٢}{٣} = ١$$

و) الرأسان (-٢،٠)، (٢، ٠) وتمر بالنقطة (٣، ٢)

الجواب

$$\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{\frac{١٦}{٥}} = ١$$

ز) الرأسان (٣، -١٠)، (٣، ٨)، اختلافه المركزي $\frac{٤}{٣}$

الجواب $\frac{(\text{ص}+١)^٢}{٨١} - \frac{(\text{س}-٣)^٢}{٦٣} = ١$

ح) نهايتا المحور المرافق (٣، ٠)،(-٣، ٠) يمر بـ(٢، ٣)

* صادي
* المركز (٠،٠)
* ب=٣
* $\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$

$\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{س}^٢}{٩} = ١$

(٢ ، ٣) تحقق ⇐ $\frac{٩}{\text{أ}^٢} - \frac{٤}{٩} = ١$
س ص

⇐ $\frac{٩}{\text{أ}^٢} = \frac{٩}{٩} + \frac{٤}{٩} = ١$

⇐ $\frac{٩}{\text{أ}^٢} = \frac{١٣}{٩}$

⇐ $\text{أ}^٢ = \frac{٨١}{١٣}$

⇐ $\frac{\text{ص}^٢}{\frac{٨١}{١٣}} - \frac{\text{س}^٢}{٩} = ١$

* **سؤال:**

جد الاختلاف $\frac{جـ}{أ}$ المركزي لقطع زائد إذا كان طول المحور القاطع = ٣ أمثال طول المحور المرافق

الحل:

$٢أ = ٣ \times ٢ب$

$أ = ٣ب$ نحتاج علاقة بين جـ،أ

$\frac{جـ}{أ} = ب$

* $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

$جـ^٢ = \frac{٩ \times أ^٢}{٩ \times ١} + \frac{أ^٢}{٩}$

$جـ^٢ = \frac{١٠أ^٢}{٩}$

$\frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{١٠}{٩}$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$ الاختلاف المركزي

* **سؤال:**

جـد معادلـة القطـع الزائـد الـذي رأسـاه همـا بؤرتـا القطـع النـاقص $٩س^٢+٤ص^٢=٣٦$ وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع.

الحل:

$\frac{٩س^٢}{٣٦} + \frac{٤ص^٢}{٣٦} = \frac{٣٦}{٣٦}$

$\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ $(ب^٢=٤، أ^٢=١)$

قطع ناقص لأن العدد الأكبر تحت الصادات

* المركز (٠، ٠)
* $أ^2=٩ \leftarrow أ=٣$
* $ب^2=٤ \leftarrow ب=٢$
* $جـ^2=أ^2-ب^2$
* $جـ^2=جـ \leftarrow جـ=\sqrt{٥}$

الرأسان (٠، ٣)، (٠، −٣) البؤرتان (٠، $\sqrt{٥}$)،(٠، $-\sqrt{٥}$)

بالنسبة للقطع الزائد:

رأساه (٠، $\sqrt{٥}$)، (٠، $-\sqrt{٥}$) بؤرتاه (٠، ٣)، (٠، −٣)

* صادي * المركز (٠،٠)
* $أ=\sqrt{٥}$
* $جـ=٣$
* $جـ^2=أ^2+ب^2 \Leftarrow ٩=٥+ب^2 \Leftarrow ٤=ب^2$
* المعادلة: $\frac{ص^2}{أ^2}-\frac{س^2}{ب^2}=١ \Leftarrow \frac{ص^2}{٥}-\frac{س^2}{٤}=١$

* سؤال:

تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث يكون الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين (٣، ٨)، (٣، −٤) يساوي ٦، أجب عما يلي

١) ما نوع هذا القطع المخروطي؟

الحل: إنها معادلة قطع زائد

٢) اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة و.

الحل: إنها معادلة قطع زائد بؤرتاه (٣، ٨) (٣، −٤) وفيه ٢أ =٦ ⇐ أ=٣

* صادي

* المركز (٣، $\frac{٨+ -٤}{٢}$)

(٣،٢)
د هـ

* جـ^٢= أ^٢+ ب^٢

٣٦=٩+ب^٢ ⇐ ٢٧=ب^٢

* ٢جـ= ٨−⁻٤

٢جـ = ١٢ ⇐ جـ = ٦

* المعادلة $\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} + \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١$

$\frac{(ص - ٢)^٢}{٩} - \frac{(س - ٣)^٢}{٢٧} = ١$

⋆ الواجب:

قطع مخروطي بؤرتاه (٢، ٢) (٢، ٨) إذا كان البعد بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من هذا الرأس وحدة واحدة جد معادلته.

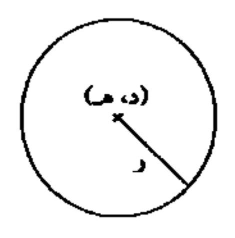
(٨-٦) الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة (س−د)^٢+(ص−هـ)^٢=ر^٢

حيث

*المركز (د، هـ)

* نصف القطر ر



الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^2+ص^2+2ل\,س+2ك\,ص+جـ=0$$

ملاحظات على الصورة العامة

* معامل $س^2$ ١، معامل $ص^2$ ١
* الطرف الأخر = صفر

حيث المركز (-ل، -ك)

$$ر=\sqrt{ل^2+ك^2-جـ}$$

* بشكل عام إذا طلبت السؤال جد معادلة الدائرة نستخدم الصورة القياسية إلا في حالتين

١) إذا أعطى السؤال ٣ نقاط على الدائرة

٢) إذا أعطى السؤال نقطتين على الدائرة (ليس لها نهايتا قطر فيها) ومعلومة أخرى مثل المركز يقع على المستقيم س=٢

نستخدم الصورة العامة

تعريف الدائرة:

هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (المركز) يساوي دائماً مقداراً ثابتاً (نصف القطر)

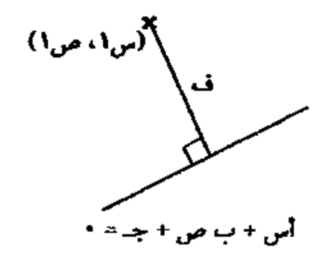
مثال:

جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٢، -٣) يساوي دائماً ٤

الحل:

إنها معادلة دائرة مركزها $(٢، -٣)$ ونصف قطرها ٤

المعادلة: $(س-٢)^٢ (ص+٣)^٢=١٦$



قانون المسافة بين نقطة ومستقيم

$$ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢+ب^٢}}$$

* سؤال:

جد معادلة الدائرة في كل من الحالات التالية:

١) المركز $(٥، -٣)$، طول قطرها ٦ $\Leftarrow$ ر=٣

المعادلة: $(س-٥)^٢+(ص+٣)^٢ =٩$

٢) المركز نقطة الأصل، طول قطرها ٥ $\Leftarrow$ ر= $\frac{٥}{٢}$

المعادلة $(س-٠)^٢+(ص-٠)^٢ = \left(\frac{٥}{٢}\right)^٢$

$$س^٢+ص^٢=\frac{٢٥}{٤}$$

٣) المركز $(٥، -٣)$ تمر بـ $(٠،٠)$

$(س-٥)^٢+ (ص+٣)^٢= ر^٢$

$(٠،٠)_{س\ ص}$ تحقق $(٠-٥)^٢+(٠+٣)^٢= ر^٢$

$٢٥+٩= ر^٢$

$ر^٢=٣٤$

$(س-٥)^٢ +(ص-٣)^٢=٣٤$

٤) نهايتا قطر فيها (٤، ١)، (٦، -٣)

المركز $\left(\frac{٤+٦}{٢}، \frac{١+-٣}{٢}\right)$

$\left(\frac{١٠}{٢}، \frac{-٢}{٢}\right)$

$(٥، -١)$ $_{\text{د}\ \text{هـ}}$

المعادلة:

$(\text{س}-٥)^٢+(\text{ص}+١)^٢=\text{ر}^٢$

$(٤، ١)_{\text{س}\ \text{ص}}$ تحقق $\Leftarrow$ $(٤-٥)^٢+(١+١)^٢=\text{ر}^٢$

$١+٤=\text{ر}^٢$

$\text{ر}^٢=٥$

$(\text{س}-٥)^٢+(\text{ص}+١)^٢=٥$

٥) المركز $(-٤، ٥)_{\text{د}\ \text{هـ}}$

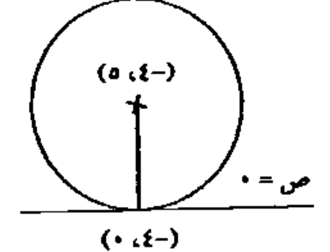
وتمس محور السينات ص=٠

المعادلة:

$(\text{س}+٤)^٢+(\text{ص}-٥)^٢=٢٥$

$\text{ر}=٥-٠$

$\text{ر}=٥$



٦) المركز (-٤، ٥) تمس محور الصادات س=٠
د هـ

(-٤، ٥)
ر
س = ٠

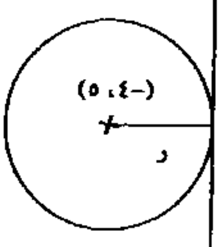
ر=٥س

ر=٠ - ⁻٤

ر=٤

(س+٤)^٢+(ص-٥)^٢=١٦

٧) المركز (-٤، ٥) تمس المستقيم س=٣
د هـ



س=٣

ر=٥س

ر= ٣- ⁻٤

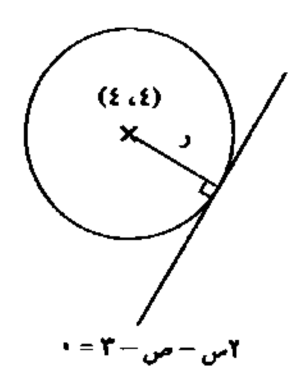
ر=٧

(س+٤)^٢+(ص-٥)^٢ = ٤٩

٨) واجب المركز (-٤، ٥) تمس المستقيم ص=٨
د هـ

الجواب: (س+٤)^٢+(ص-٥)^٢=٩

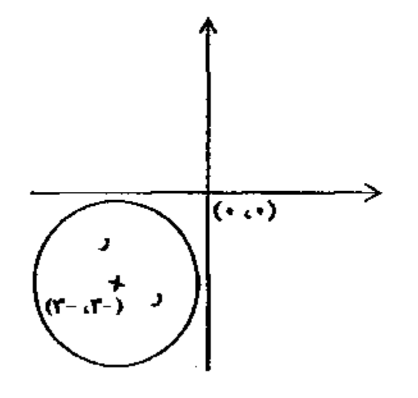
٩) المركز (٤، ٤) تمس المستقيم ص=٢س-٣
د هـ



ر= |٢×٤ - ٤ - ٣| / √((٢)^٢+(-١)^٢)

ر= |١| / √٥

$$(س-٤)^{٢} + (ص-٤)^{٢} = \frac{١}{٥}$$



١٠) الـدائرة تقـع في الربـع الثالـث وتمـس محـوري الـسينات والـصادات علمـاً بـأن حـول قطرها ٦ ⇐ ر=٣

$$(س+٣)^{٢}+(ص+٣)^{٢}= ٩$$

١١) تقع في الربع الثاني وتمس محوري السينات والصادات، علماً بـأن طـول قطرها ٨ ، ر=٤

الجواب: $(س-٤)^{٢}+(ص-٤)^{٢}=١٦$

١٢) تمس المستقيمات س=⁻١ س=⁻٧ ص=٢

طول القطر =٥س

٢ر=-١-⁻٧

٢ر=-١+٧

٢ر=٦

ر=٣

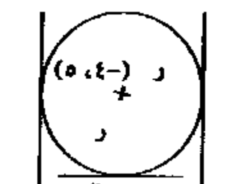
هناك حالتان:

حالة أ 

$(س+٤)^{٢}+(ص+١)^{٢}=٩$

حالة ب

$(س+٤)^{٢}+(ص-٥)^{٢}=٩$



الواجب

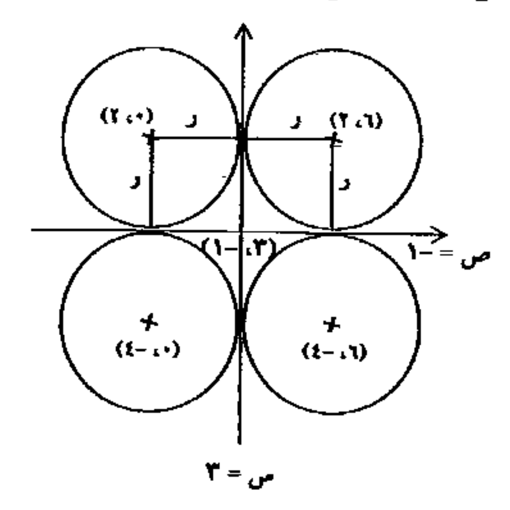
١٣) الدائرة تمس المستقيمات ص=١ ص=٩ س=٢

الجواب

حالة أ) $(س-٦)^{٢}+(ص-٥)^{٢}=١٦$

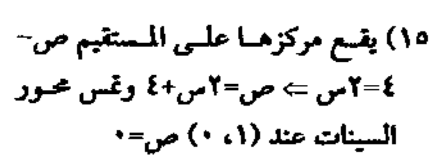
حالة ب) $(س+٢)^{٢}+(ص-٥)^{٢}=١٦$.

١٤) الدائرة تمس المستقيمين ص=−١، س=٣، علماً بأن نصف قطرها ٣

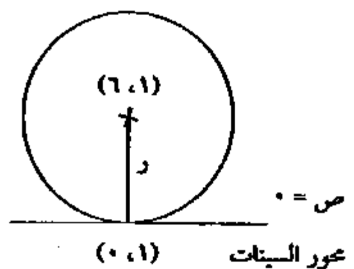


هناك ٤ حالات:

* $(س-٦)^{٢}+(ص-٢)^{٢}=٩$
* $س^{٢}+(ص-٢)^{٢}=٩$
* $س^{٢}+(ص+٤)^{٢}=-٩$
* $(س-٦)^{٢}+(ص+٤)^{٢}=٩$



١٥) يقع مركزها على المستقيم ص−٤=٢س ⇐ ص=٢س+٤ وتمس محور السينات عند (١، ٠) ص=٠



الحل:

* هـ= ٢×١+٤

هـ=٦

* ر=٥ص

ر=٦−٠

ر=٦

المعادلة: $(س-١)^{٢}+(ص-٦)^{٢}=٣٦$

١٦) الدائرة تمر بالنقطة (١، ٢) وتمس محور السينات عند (٧، ٠)

$(س-٧)^{٢}+(ص-هـ)^{٢}=هـ^{٢}$

(١، ٢) (س،ص) تحققه

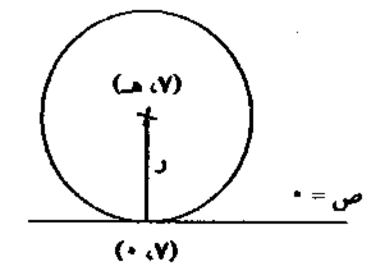
⇐ $٣٦+(٢-هـ)^{٢}=هـ^{٢}$

$٣٦+٤-٤هـ+هـ^{٢}-هـ^{٢}=٠$

٤٠=٤هـ

هـ=١٠

$(س-٧)^{٢}+(ص-١٠)^{٢}=١٠٠$



ر = هـ − ٠

ر = هـ

(٨-٧) تمييز القطوع

الصورة العامة لمعادلة القطع المخروطي:

أس^2+ب ص^2+جـ س+د ص+هـ=٠

أ، ب ليس كلاهما صفر الذي يحدد نوع القطع المخروطي هو معامل س^2، معامل ص^2 فقط.

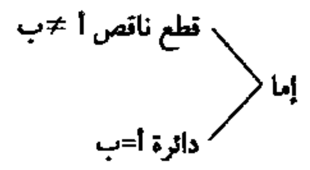
١) إذا كان هناك تربيع وحيد ⇐ قطع مكافئ أ×ب=٠

٢) إذا كان أ، ب مختلفان في الإشارة ⇐ قطع زائد

أ×ب > ٠

٣) إذا كان أ،ب لهما نفس الإشارة

أ×ب >٠



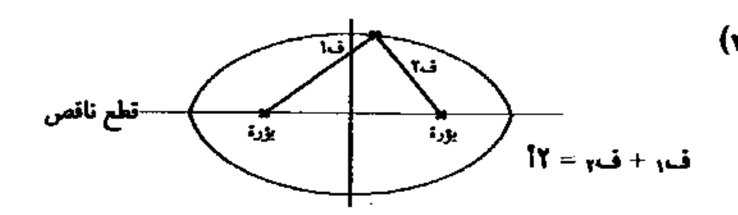
(٨-٨) المحل الهندسي

١)

قطع مكافئ
بؤرة
بؤرة
دليل

بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة)= دائماً بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل)

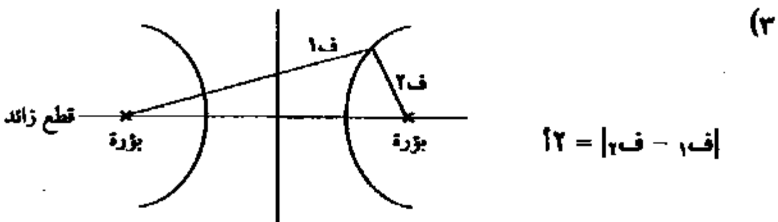
٢)



ف١ + ف٢ = ٢أ

مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) = دائماً مقداراً ثابتاً (٢أ)

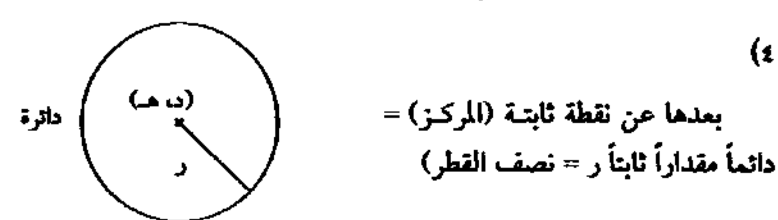
٣)



|ف١ − ف٢| = ٢أ

الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين البؤرتين = دائماً مقداراً ثابتاً ٢أ

٤)



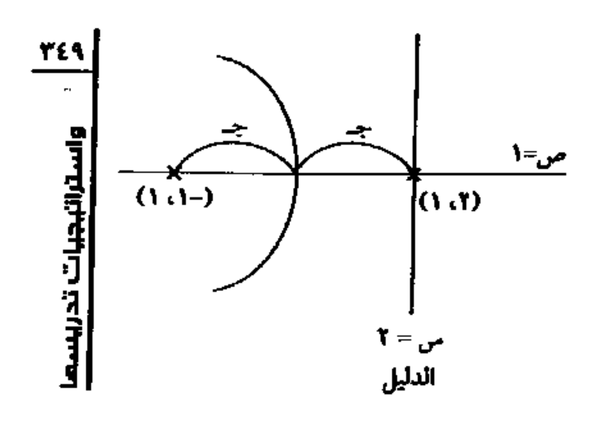
بعدها عن نقطة ثابتة (المركز) = دائماً مقداراً ثابتاً ر = نصف القطر)

* سؤال:

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) في المستوى بحيث يكون: بعدها عن النقطة بـ (−١، ١) سارياً دائماً لبعدها عن المستقيم س=٢

الحل:

إنها معادلة قطع مكافئ بؤرته (−١، ١) دليله س=٢



الرأس: $(\frac{٢+-١}{٢}، ١)$

$(\frac{١}{٢}، ١،١)$

د هـ

٢جـ=٢ - -١

٢جـ=٣

جـ=$\frac{٣}{٢}$

* لليسار ⇐ التربيع لِـ ص ر سالب

المعادلة :

$(ص-هـ)^{٢}= -٤جـ(س-د)$

$(ص-١)^{٢}= -٤ \frac{٣}{٢}(س-\frac{١}{٢})$

$(ص-١)^{٢}= -٦(س-\frac{١}{٢})$

* سؤال:

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون: مجموع بعديها عن النقطتين ب (س)، ج(-١،٠) يساوي دائماً ٦ وحدات.

الحل:

إنها معادلة قطع ناقص بؤرتاه (١، ٠) (-١، ٠) وفيه ٢أ =٦ أ=٣

*سيني

*المركز (٠، ٠) (د،هـ)

*جـ=١

*$جـ^{٢}=أ^{٢}-ب^{٢}$

$ب^{٢}=٨$

المعادلة:

$$\frac{(س-د)^2}{أ^2}+\frac{(ص-هـ)^2}{ب^2}=1$$

$$\frac{(ص-0)^2}{9}-\frac{(س-0)^2}{8}=1 \Leftarrow \frac{س^2}{9}-\frac{ص^2}{8}=1$$

*** سؤال:**

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص) المتحركة في المستوى بحيث يكون: الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين ج(٠، ٥)، ج(٠، -٥) يساوي دائماً ٨ وحدات.

الحل:

إنها معادلة قطع زائد بؤرتاهُ (٠، ٥)، (٠، -٥) وفيه ٢

أ=٨

أ=٤

*صادي

*المركز (٠، ٠)

*جـ=٥

$*جـ^2=أ^2-ب^2$

$٢٥=١٦-ب^2 \quad ب^2=٩$

*المعادلة : $\frac{ص^2}{أ^2}-\frac{س^2}{ب^2}=1 \Leftarrow \frac{ص^2}{16}-\frac{س^2}{9}=1$

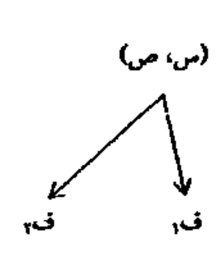
الواجب:

جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون: بعدها عن النقطة (٢، -٣) يساوي دائماً ٥

الجواب $(س-٢)^2+(ص+٣)^2=٢٥$

* **سؤال:**

جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى (س،ص) على بعدين متساويين من النقطتين (٢، ٠) (-٢، ٠)



ف١=ف٢

$\sqrt{(س-٢)^٢+ص^٢} = \sqrt{(س+٢)^٢+ص^٢}$

$(س-٢)^٢+ص^٢ = (س+٢)^٢+ص^٢$

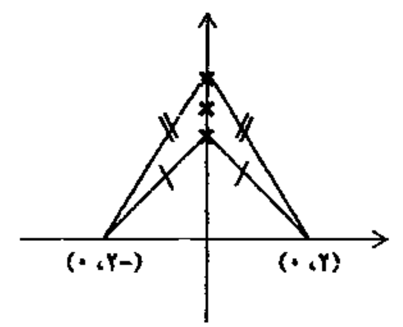
$س^٢-٤س+٤= س^٢+٤س+٤$

$س^٢-٤س+٤- س^٢-٤س-٤=٠$

$\frac{-٨س}{-٨} = \frac{٠}{-٨}$

س=٠ محور الصادات

توضيح



أسئلة نهاية الوحدة الثامنة

* سؤال ١:

إذا كان أس^٢+٥ص^٢−٣س+٧ص=٤ تمثل معادلة قطع مخروطي، جد قيمة أ التي تجعل المعادلة:

١) دائرة أ=٥

٢) قطع ناقص أ>٠، أ ≠ ٥ أو (٠، ∞) − {٥}

٣) قطع زائد أ<٠ أو (−∞،٠)

٤) قطع مكافئ أ=٠

* سؤال ٢:

جد مجموعة قيم م التي تجعل المعادلة:

$$\frac{س^٢}{٧-م}+\frac{ص^٢}{٤-م}=١$$

تمثل معادلة قطع زائد

الحل:

$$\frac{(٤-م)س^٢+(٧-م)ص^٢}{(٧-م)(٤-م)}=١$$

(٤−م)س^٢+(٧−م)ص^٢= (٧−م)(٤−م)

بما أنه قطع زائد ⇐ (٤−م) (٧−م)<٠

ندرس إشارتها على خط الأعداد ونأخذ الجزء الذي إشارته سالبة

(٤−م) (٧−م)=٠

م=٤، ٧

إشارة	++++		----		++++
(٤−م) (٧−م)		٤		٧	

م=(٤،٧)

*** سؤال ٣:**

قطع زائد معادلته ٢س^{٢} −٣ص^{٢} +١٨ص=ك جد قيم التي تجعل محوره القاطع // محور الصادات

*** سؤال ٤:**

جد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه مركز الدائرة التي معادلتها (٢س−٨)^{٢}+(٢ص−٦)^{٢}=١٦ وطول محوره المرافق يساوي طول قطر الدائرة ومركزة يقع على المستقيم س=−١

الحل:

بالنسبة للدائرة

(٢(س−٤)^{٢}+(٢(ص−٣)^{٢})=١٦

$\frac{٤}{٤}$(س−٤))^{٢}+ $\frac{٤}{٤}$(ص−٣)^{٢} = $\frac{١٦}{٤}$

(س−٤)^{٢}+(ص−٣)^{٢}=٤

* مركز الدائرة (٤، ٣)

*ر=$\sqrt{٤}$ =٢ ⇐ طول قطر الدائرة =٤

بالنسبة للقطع الزائدة

*أحد رأسيه (٤، ٣)

* طول محوره المرافق =٤ ⇐ ب=٢

* مركزه يقع على المستقيم س=−١

أ=٤ − ⁻١

أ=٥

المعادلة $\frac{(س+١)^{٢}}{٢٥}+\frac{(ص-٣)^{٢}}{٤}=١$

أ
ص = ٣
(−١، ٣)
(٤، ٣)
د هـ
س = −١

★ سؤال ٥:

جد معادلة القطع الناقص الذي

*إحدى بؤرتيه مركز الدائرة (٢س−٦)^{٢}+(٢ص−٤)^{٢}=٣٦

* وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة *ومعادلة محوره الأصغر س=−١

الحل:

بالنسبة للدائرة

(٢(س−٣))^{٢}+(٢(ص−٢))^{٢}=٣٦

٤(س−٣)^{٢}+ ٤(ص−٢)^{٢}=٣٦

(س−٣)^{٢}+(ص−٢)^{٢}=٩ الصورة القياسية

* مركز الدائرة (٣، ٢)

* ر= $\sqrt{٩}$ =٣ ⟸ طول قطر الدائرة ٦.

أصبح السؤال: جد معادلة القطع الناقص الذي

*إحدى بؤرتيه (٣، ٢)

*٢ب=٦ ⟸ ب=٣

*معادلة محوره الأصغر س=−١

* سيني

* المركز (−١، ٢)

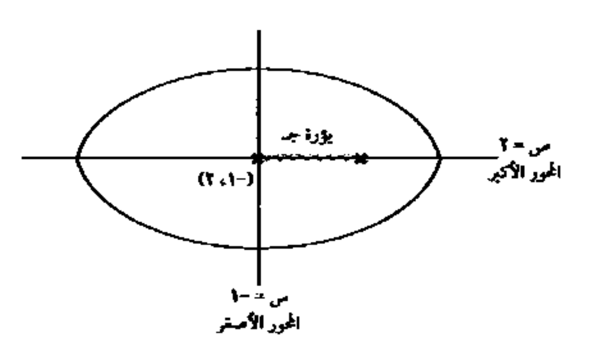
* جـ= ٣ − $^{-}$١

جـ=٤

*جـ^{٢}=أ^{٢}−ب^{٢}

١٦=أ^{٢}−٩

أ^{٢}= ٢٥



*المعادلة:

$$\frac{(س-د)^٢}{أ^٢}+\frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢}=١$$

$$\frac{(س+١)^٢}{٢٥}+\frac{(ص-٢)^٢}{٩}=١$$

* سؤال ٦:

جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ $ص=\frac{١}{٤}س^٢+س+٣$ وتمس دليله

الحل:

بالنسبة للقطع المكافئ

٤×١ $ص=\frac{١}{٤}س^٢+س+٣$

$٤ص=س^٢+٤س+١٢$

$س^٢+٤س=٤ص+١٢$

$(س^٢+٤س+٤)=٤ص-١٢+٤$

$(س+٢)^٢=٤ص-٨$

$(س+٢)^٢=٤(ص-٢)$ الصورة القياسية

التربيع لـ س وموجبه ⇐ للأعلى

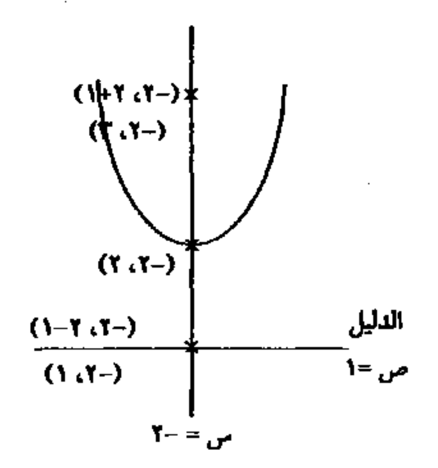
* الرأس (-٢،٢)

* ٤جـ =٤⇐ جـ=١

بؤرة القطع المكافئ (-٢، ٣)

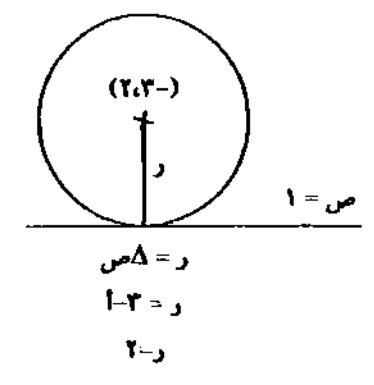


معادلة الدليل ص=١



أصبح السؤال:

جد معادلة الدائرة التي مركزها (-٢، ٣) تمس المستقيم ص=١

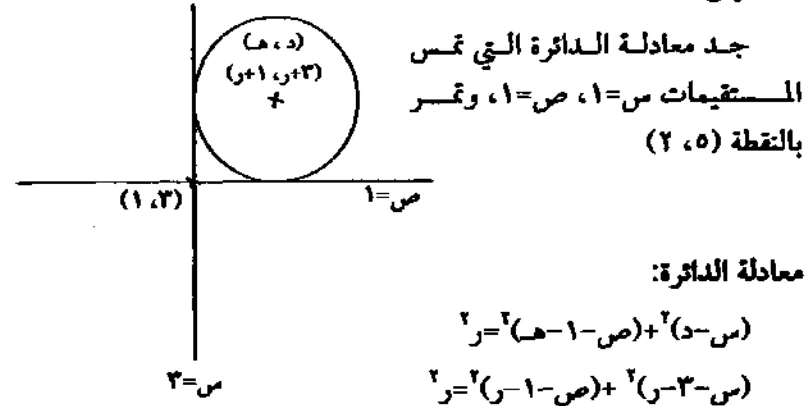


معادلة الدائرة:

(س+٢)^٢^+(ص-٣)^٢^=٤

٭ سؤال ٧:

جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات س=١، ص=١، وتمر بالنقطة (٥، ٢)



معادلة الدائرة:

(س-د)^٢^+(ص-١-هـ)^٢^=ر^٢^

(س-٣-ر)^٢^ +(ص-١-ر)^٢^=ر^٢^

$(٢،٥) \Leftarrow (٢-ر)^٢+(١-ر)^٢=ر^٢$

$٤-٤ر+ر^٢+١-٢ر+ر^٢-ر^٢=٠$

$ر^٢-٦ر+٥=٠$

$(ر-١)(ر-٥)=٠$

$ر=١ \quad ر=٥$

حالة ١ عندما ر=١

$(س-٤)^٢+(ص-٢)^٢=١$

حالة ٢ عندما ر =٥

$(س-٨)^٢+(ص-٦)^٢=٢٥$

⋆ سؤال ٨:

جد معادلة المحل الهندسي (س،ص) لنقطة تتحرك في المستوى على بعدين متساويين من المحورين الإحداثيين قصده محور السينات ص=٠ ومحور الصادات س=٠

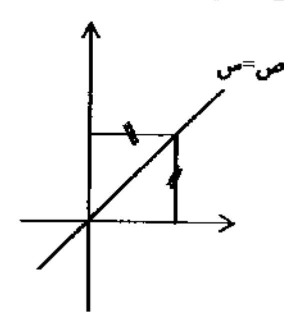
$ف_١=ف_٢$

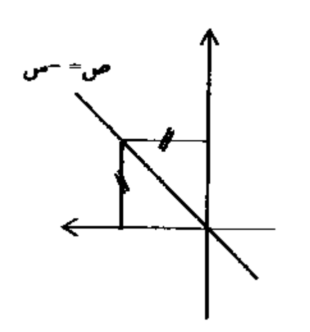
$$\frac{|ص|}{\sqrt{١+٠}}=\frac{|س|}{\sqrt{٠+١}}$$

|ص|=|س| لا نربع الطرفين لأنه لا يوجد جذر

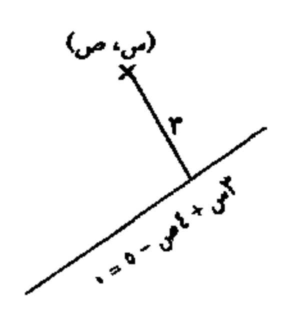
ص=س أو ص=–س

توضيح





★ **سؤال ٩:**



جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س،ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره ٣ وحدات عن المستقيم الذي معادلته ٣س+٤ص=٥ وتمر أثناء حركتها بمركز الدائرة (س-٤)^{٢}+(ص-٢)^{٢}=٩ تمر بـ(٤، ٢)

الحل:

تمر بـ (٤، ٢)

$$٣ = \frac{|\text{٣س} + \text{٤ص} - ٥|}{\sqrt{٩+١٦}}$$

$$٣ = \frac{|\text{٣س} + \text{٤ص} - ٥|}{٥}$$

|٣س+٤ص-٥|=١٥

٣س+٤ص-٥=١٥ أو ٣س+٤ص-٥=-١٥

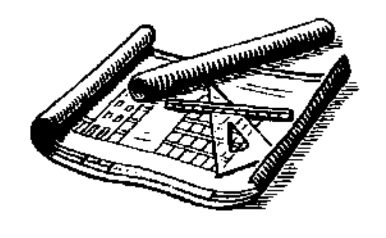
٣س+٤ص=٢٠أو ٣س+٤ص=-١٠

(٤، ٢) ⇐ ٣×٤+٤×٢=٢٠ تحقق المعادلة (٢،٤) لا تحقق المعادلة

الجواب: ٣س+٤ص=٢٠

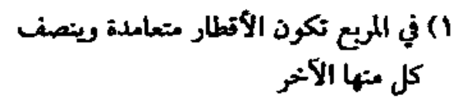
الوحدة التاسعة

الهندسة الفضائية

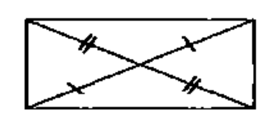


الوحدة التاسعة
الهندسة الفضائية

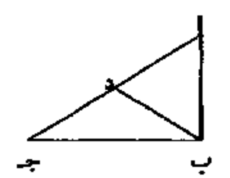
(٩-١) ملاحظات عامة:



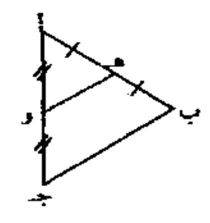
١) في المربع تكون الأقطار متعامدة وينصف كل منها الآخر



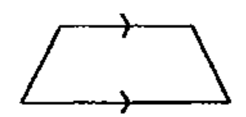
٢) في المستطيل ينصف كل من القطرين الآخر (وغير متعامدين)



٣) في المثلث القائم: الخط الواصل من رأس القائمة (ب) إلى منتصف الوتر يساوي نصف الوتر (أد=دج=ب د)



٤) في أي مثلث إذا وصلنا نقطتي المنتصفين هـ،و (منتصفات أب، أجـ) فإن: هـ و // ب جـ ويكون هـ و = $\frac{1}{2}$ ب جـ

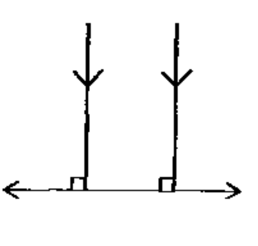


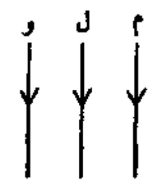
٥) شبه المنحرف: هو شكل رباعي فيه ضلعين متوازيين

ملاحظة:

الشكل أ ب جـ د جانباً هو شكل رباعي فقط

٦) الخطان العموديان على نفس المستقيم ويقعان في نفس المستوى (متوازيان) لاحظ أن المستقيمات الثلاثة في نفس المستوى



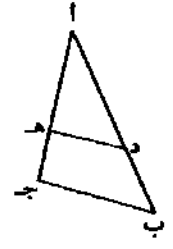


٧) إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ ، $\overleftrightarrow{و}$ ، في مستوى واحد وكان $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{م}$ ، $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{و} \Leftarrow \overleftrightarrow{م} \parallel \overleftrightarrow{و}$

٨) المثلثان أدهـ أ ب جـ متشابهان ونستنتج من التشابه أن:

$$\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{ب جـ}}$$

أيضاً $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

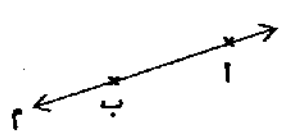


(٩-٢) البناء الرياضي للهندسة الفضائية

المفاهيم الأساسية للهندسة المستوية:

١) النقطة: تتحدد بموقع ليس له أبعاد (طول، عرض، ارتفاع) ويرمز لها بالرمز أ، ب، جـ....

٢) المستقيم: يتكون من مجموعة نقط غير منتهية تقع على استقامة واحدة. يمتد من طرفيه إلى ما لا نهاية وهو ذو بعد واحد. يرمز لهبأحد حروف الهجاء أو نقطتين واقعتين عليه. الشكل المجاور يمثل المستقيم (م): $\overleftrightarrow{أب}$ أو $\overleftrightarrow{م}$



*نستخدم الرمز $\overline{أب}$ ليدل على القطعة المستقيمة أب، والرمز أب ليدل على طول القطعة المستقيمة أ ب.

٣) المستوى: سطح منبسط ذو بعدين يمتد بلا حدود من جميع جهاته، وغالباً يمثل هندسياً بمنطقة رباعية لأغراض الدراسة. يرمز له بأحد حروف الهجاء، أو ثلاثة (أربعة) حروف تمثل ثلاث (أربع) نقط عليه ليست على استقامة واحدة. الشكل المجاور يمثل المستوى س أو المستوى أ ب جـ أو المستوى أ ب جـ د

لاحظ: سطح الطاولة، سطح السبورة، سطح ملعب كرة القدم، وورقة الكتاب هي أمثلة على المستويات.

* الهندسة المستوية: الدراسة الهندسية للنقط والمستقيمات والمستويات الواقعة في مستوى واحد، والعلاقة بينها.

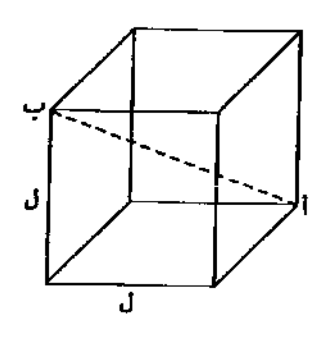
* الهندسة الفضائية: الدراسة الهندسية لأجسام ذات ثلاثة أبعاد (البنايات والسيارات والأثاث) تشغل حيّز في الفضاء لاحظ أن الهندسة الفضائية تهتم بالنقط والمستقيمات والمستويات التي في الفضاء والعلاقة بينها.

الفضاء: مجموعة غير منتهية من النقط تحوي المستقيمات والمستويات.

أمثلة على أشكال هندسية ذات ثلاثة أبعاد

المكعّب، الهرم، المنشور، الأسطوانة، المخروط، الكرة،....

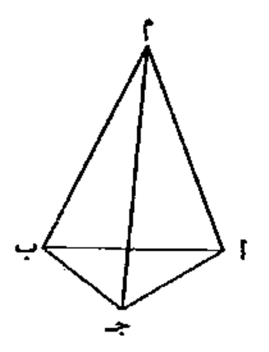
المكعّب:



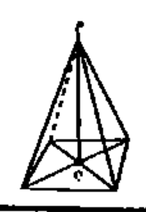
عدد الأوجه= ٦(جميعها مربعات) جميع أحرفه متساوية طول كل منها =ل عدد الأحرف=١٢حرف المساحة الجانبية ٤ل^٢ المساحة الكلية=٦ل^٢ الحجم =ل^٣ وتر المكعب هو المستقيم الواصل بين رأسين لا يقعان في مستوى واحد (مثل أ ب في الشكل) ويكون باستخدام نظرية فيثاغورس

طول الوتر= $\sqrt{٣}$ ×طول الحرف

الهرم:

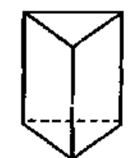


أ ب جـ تسمى قاعدة الهرم م هو رأس الهرم عدد أحرف الهرم الثلاثي =٦أحرف (م أ، م ب، م جـ أ ب، أ جـ ب جـ) يسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته بحيث: إذا كانت القاعدة مثلث يسمى هرم ثلاثي وإذا كانت القاعدة شكل رباعي يسمى هرم رباعي وإذا كانت القاعدة شكل خماسي يسمى هرم خماسي وهكذا...



ملاحظة: الهرم الرباعي في الشكل المجاور هو هرم قائم حيث أن مسقط م على القاعدة هو النقطة ن التي تكون نقطة تقاطع قطري المربع الذي يمثل قاعدة الهرم.

المنشور:



(الثلاثي) المنشور القائم الشكل المجاور قاعدتاه مثلثان متوازيان ومتطابقان والأوجه الجانبية له هي مستطيلات.

الأسطوانة:



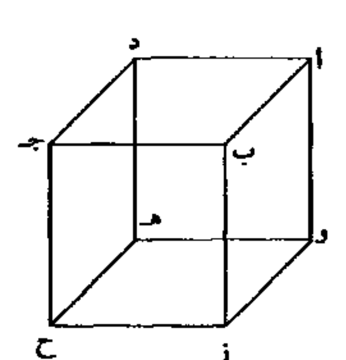


المخروط:



الكرة:

مثال (١):



اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

١) سم ثلاثة مستقيمات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{هـ ح}}$.

٢) سمَ ثلاثة مستويات أ ب جـ أ ب ز، ب جـ ح.

٣) سمّ ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة جـ دب، جـ ح، ب جـ.

٤) سمّ مستقيماً يمر بالنقطتين جـ د معاً. $\overline{\text{د جـ}}$

٥) سمَ مستقيماً يقع في مستويين مختلفين، ثم اذكر المستويين $\overline{\text{د جـ}}$، يقع في المستوى أ، جـ دجـ ح.

مثال (٢):

اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

١) سم ثلاثة مستقيمات أجـ، أب، ب جـ.

٢) سم ثلاثة مستويات أب جـ، أ جـ د، ب جـ د.

٣) سمّ ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة جـ.
أجـ، ب جـ، د جـ.

٤) سمّ مستقيماً يمر بالنقطتين جـ د معاً: جـ د.

٥) سمّ مستقيماً يقع في مستويين مختلفين، ثم اذكر المستويين ب جـ يقع في المستوى أ ب جـ والمستوى ب جـ د.

(٩-٣) مسلمات الهندسة الفضائية

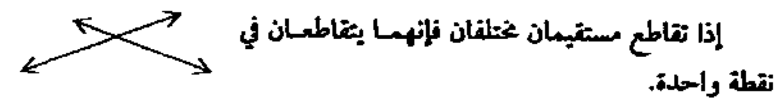
تعريف:

إذا وقعت مجموعة نقط على مستقيم واحد يسمى نقاطاً مستقيمة، وإذا وقعت في مستوى واحد تسمى نقاطاً مستوية.

مسلّمة ١:

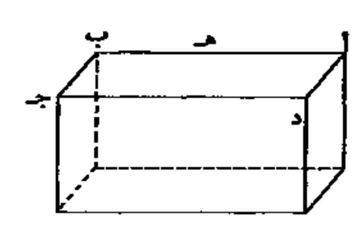
أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم واحد. هذا يعني أن أي مستقيم في الفضاء يحوي نقطتين على الأقل.

مسلّمة ٢:



إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

مسلّمة ٣:

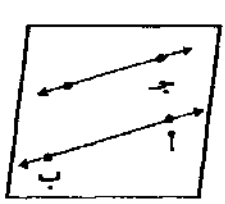


يوجد لأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة مستوى واحد فقط يحويها.

لاحظ أننا نستطيع تعيين المستوى بإحدى الحالات الثلاثة التالية:

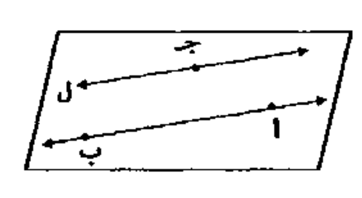
١) مستقيم ونقطة خارجة: لأن المستقيم يحوي نقطتين على الأقل وهناك نقطة أخرى خارج المستقيم ⇐ يوجد ٣ نقاط لا تقع على استقامة واحدة فهي تعيّن مستوى.

٢) مستقيمان متقاطعان: لأن أحدهما يحوي نقطتين على الأقل والآخر يحوي نقطة ثالثة على الأقل (غير نقطة التقاطع) ⇐ يوجد ٣ نقاط لا تقع على استقامة واحدة فهي تعيّن مستوى.



٣) مستقيمان متوازيان: تستطيع اختيار نقطتين على أحدهما ونقطة ثالثة على المستقيم الآخر ⇐ يوجد ٣ نقاط لا تقع على استقامة واحدة فهي تعيّن مستوى.

مسلّمة ٤:



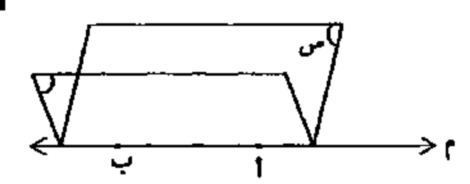
من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازيه.

مسلّمة ٥:

إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الذي يحويهما يقع بأكمله في المستوى نفسه.

مسلّمة ٦:

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم.



نتائج:

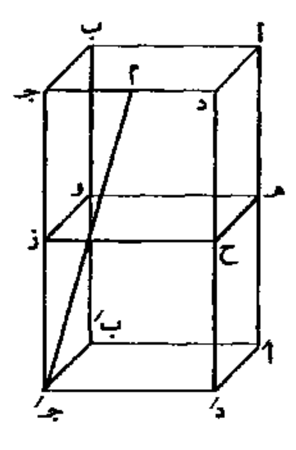
١) يوجد مستوى واحد فقط يحوي ٣ نقط لا تقع على استقامة واحدة (وبعبارة أخرى: إذا اشترك مستويان في ٣ نقط لا تقع على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان).

٢) إذا اشترك مستويان في نقطة واحدة فإنهما يشتركان في نقطة أخرى على الأقل. (لأن المستويان يتقاطعان في مستقيم).

أمثلة

مثال (١):

اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:



١) حدّد تقاطع المستويين أ أ/ ب/ ب، ب ب/ جـ/ جـ

الحل: المستقيم $\overleftrightarrow{ب ب/}$

٢) حدد مستقيماً يمر بالنقطة د ويوازي $\overleftrightarrow{ب ب/}$

الحل: د دَ

٣) حدّد مستوى يحوي المستقيمين م جـَ، جـ جـَ

الحل: المستوى د جـ جـَ

مثال (٢):

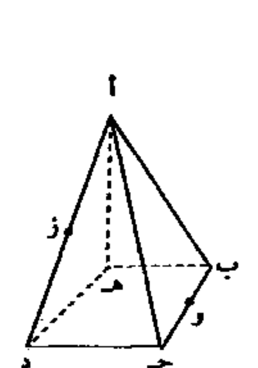
اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة التالية:

١) حدّد تقاطع المستويين أ أَ بَ ب، أ ب جـ د المستقيم أ ب

٢) حدّد مستقيماً يمر بالنقطة د ويوازي ب بَ د دَ

٣) حدّد مستوى يحوي المستقيم و ز هـ ح ز

تمارين:



١) الشكل المجاور يمثل هرم خوفو في مصر والنقطتان، و، ز تمثلان فتحتين إلى داخل الهرم. أعط مثالاً لكل مما يأتي:

أ) ثلاث نقط على استقامة واحدة ب، و، جـ

ب) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة و، جـ د

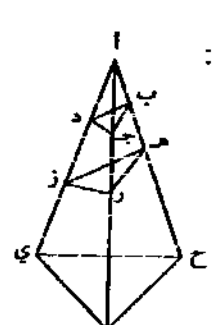
جـ) خمس نقط مستوية ب، و، جـ د، هـ

د) أربع نقط ليست مستوية ب، و، جـ ز

هـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة من بينها النقطة ز. أ، ز، د

و) نقطة تقاطع أ ز مع هـ د النقطة د.

٢) اعتمد على الشكل المجاور للإجابة على الأسئلة التالية:



أ) سمّ أربعة مستويات مختلفة ب جـ د،
هـ و ز، ح ط ي أ ح ط.

ب) سمّ مستويين يحويان المستقيم ح ي.
ح ي ط، أ ح ي.

٣) ما عدد المستويات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل منها:

أ) بثلاث نقط على استقامة واحدة. عدد لا نهائي من المستويات.

ب) بأربع نقط ثلاث منها على استقامة واحدة مستوى واحد فقط.

جـ) رؤوس هرم ثلاثي. لا يوجد

د) بثلاث نقط من بين أربع نقاط غير مستوية. أربعة مستويات.

٤) أي العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

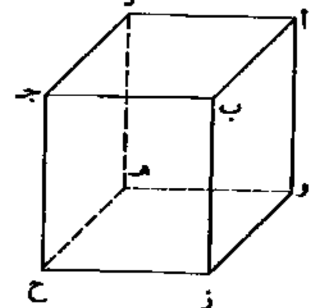
أ) يوجد أكثر من مستوى يمر بمستقيمين متوازيين (خاطئة)

ب) كل مستقيم يمكن أن يمر به عدد غير منته من المستويات (صحيحة)

جـ) إذا كان أ ب يقع في المستوى س فإن أ ب يقطع المستوى س في نقطتين فقط (خاطئة).

د) يقع المثلث بأكمله في مستوى واحد (صحيحة).

(٩-٤) أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء



أولاً: العلاقة بين مستقيمين في الفضاء

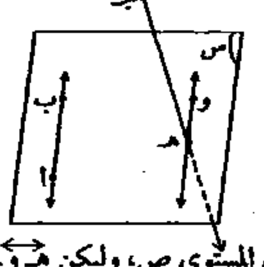
١) متقاطعان: إذا وقعا في مستوى واحد واشتركا في نقطة واحدة (مثل $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$)

٢) متوازيان: إذا وقعا في مستوى واحد ولم يتقاطعا (مثل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$)

٣) متخالفان: لا يمكن أن يحويهما مستوى واحد (مثال $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ز ح}}$)

ملاحظة: تعتبر القطعتان $\overline{أ ب}$، $\overline{جـ د}$، متوازيتين إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{أ ب}$، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متوازيين، وتعتبران متخالفتين إذا كان المستقيمان متخالفين.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين:



في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{أ ب}$، $\overleftrightarrow{جـ د}$، مستقيمان متخالفان، والمستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$، يقطع المستوى ص في النقطة هـ $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقع في المستوى ص ولحساب الزاوية فإننا:

١) نرسم مستقيماً من النقطة هـ يوازي $\overleftrightarrow{أ ب}$ ويقع في المستوى ص، وليكن $\overleftrightarrow{هـ و}$.

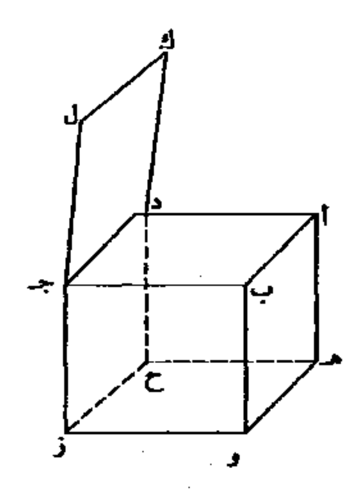
٢) الزاوية جـ هـ وهي الزاوية بين $\overleftrightarrow{أ ب}$، $\overleftrightarrow{جـ د}$.

ملاحظة: إذا كانت الزاوية بين المستقيمين المتخالفين قائمة فإنهما متعامدين.

أمثلة:

مثال (١):

يمثل الشكل المجاور صندوقاً مرفوع الغطاء أعطِ مثالاً على كل حالة من الحالات التالية:



١) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية:

* $\overleftrightarrow{ك ل}$ // $\overleftrightarrow{د جـ}$
* $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$
* $\overleftrightarrow{هـ ح}$ // $\overleftrightarrow{و ز}$

٢) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة

* $\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overleftrightarrow{د جـ}$
* $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{و ز}$
* $\overleftrightarrow{د ح}$ // $\overleftrightarrow{ح ز}$

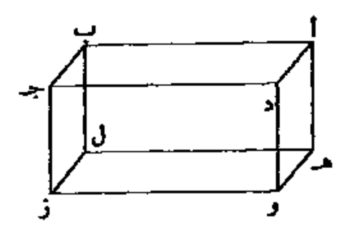
٣) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة

* أب، ح هـ

* ب جـ ح ز

* أ د، هـ و.

مثال (٢):



يمثل الشكل المجاور متوازي مستطيلات اعتمد عليه للإجابة عن الأسئلة التالية:

١) سم ثلاثة مستقيمات توازي المستقيم دجـ

* أ ب. * و ز. * هـ ل.

٢) سم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة

* أب، ب جـ

* ب جـ جـ ز.

* ب ل، ل هـ.

٣) سم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة

* أ ب، ل ز.

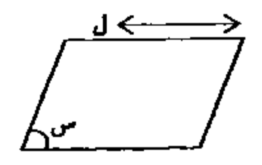
* و ز، أ د.

* د جـ هـ و.

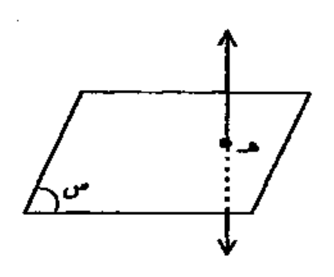
ثانياً: العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء

يمكن حصر العلاقة في أحد الأوضاع الثلاثة الآتية:

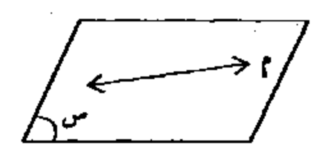
١) المستقيم يوازي المستوى: إذا لم يشترك المستقيم مع المستوى في أي نقطة.



٢) المستقيم يقطع المستوى في نقطة واحدة

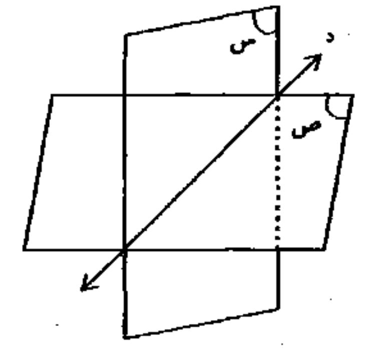


٣) المستقيم يقع بأكمله في المستوى



ثالثاً: العلاقة بين مستويين في الفضاء

١) يتقاطع المستويان في مستقيم.

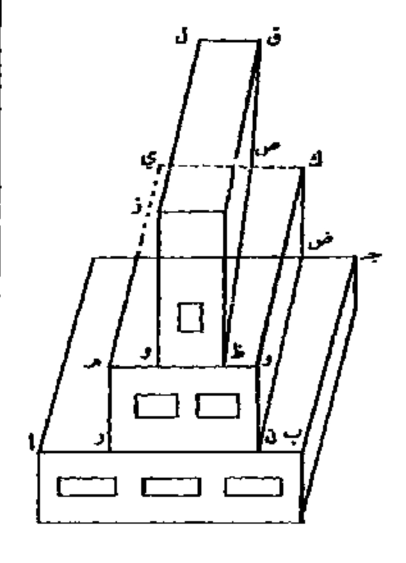


٢) يتوازى المستويان إذا لم توجد نقاط مشتركة.

مثال:

يمثل الشكل المجاور مجمع تجاري في مدينة عمان، أجب عن الأسئلة التالية:

١) سم زوجين لمستويين متوازيين.
٢) سم زوجين لمستويين متقاطعين.
٣) سم مستقيماً يوازي مستوى.
٤) سم مستقيماً يقطع مستوى.



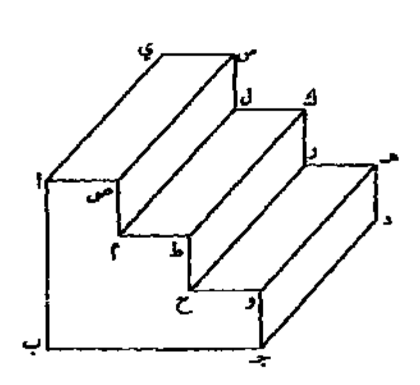
الحل:

١)المستويان أ ب جـ هـ و ك متوازيان، وكذلك نوك، رهـ ى.
٢)المستويان و ن ر، أ ب جـ متقاطعان وكذلك المستويان ط و هـ نو ك.
٣) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ك و}}$ // المستوى أ ب جـ
٤) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$ يتقاطع مع المستوى أ ب جـ

مثال:

الشكل يمثل درج أعط مثالاً على كل من الحالات التالية:

١) مستويان متوازيان.
٢)مستوى يوازي المستوى س ل م.
٣)مستقيم يوازي المستوى هـ و ح.
٤)مستقيم يقطع المستوى أ ب جـ.



الحل:

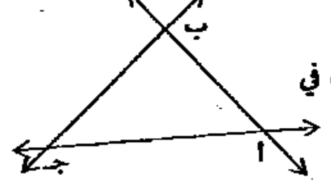
١)المستوى س ي أ // المستوى ك ل م.

٢) المستوى ك ر ح // المستوى س ل م.

٣) ك ط // المستوى هـ و ح.

٤) س ص يقطع المستوى أ ب جـ

مثال:



أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستقيمات في ثلاث نقط فإنها تقع في مستوى واحد.

الحل:

أب، ب جـ أ جـ ثلاثة مستقيمات متقاطعة في ثلاث نقاط.

أ ب، ب جـ مستقيمان متقاطعان فهما يشكلان مستوى واحد. ليكن س.

وبما أن أ، جـ تنتميان للمستوى س ⇐ المستقيم أ جـ الذي يحويهما يقع بأكمله في المستوى س.

أي أن المستقيمات أب، ب جـ جـ أ تقع في مستوى واحد.

مثال:

أثبت أن كل مستوى يحوي ثلاثة مستقيمات على الأقل.

الحل:

نفرض أ، ب، جـ ٣ نقط ليست على استقامة واحدة.

⇐ يوجد مستوى واحد فقط يحويها معاً وليكن المستوى (س) يمكن لأي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بها مستقيم واحد (مسلمة ١)

⇐ هنالك ٣ مستقيمات مختلفة على الأقل هي أب، ب جـ أ جـ تقع في المستوى س.

تمارين.

ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة. وإشارة (✗) أمام العبارة الخطأ. مع ذكر السبب.

أ) إذا لم يشترك المستقيم ل مع المستوى س في أي نقطة فإن ل ؟ س

الحل:

أ) تعريف توازي مستقيم ومستوى.

ب) إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستوى.

الحل:

(✗) يتقاطع مستويان بمستقيم.

جـ) من نقطة خارج مستوى يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازي هذا المستوى.

الحل:

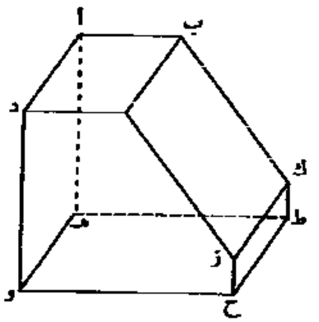
(✗) (يمكن رسم عدد لا نهائي من المستقيمات المارة بنقطة خارج المستوى وتوازي المستوى).

د) إذا توازى مستقيمان فإن أي مستقيم يقطع أحدهما الآخر.

الحل:

(✓) لأن أي مستقيمين متوازيين يقعان في مستوى فأي قاطع لأحدهما يقطع الآخر).

٢) في الشكل المجاور اذكر أسماء كل مما يأتي



أ) حرفان متقاطعان ↔جـ ز، ↔جـ د.

ب) حرفان متوازيان ↔أب، ↔جـ د.

جـ) حرفان متعامدان ↔أب، ↔أ هـ.

د) حرفان متخالفان ↔أب، ↔هـ و.

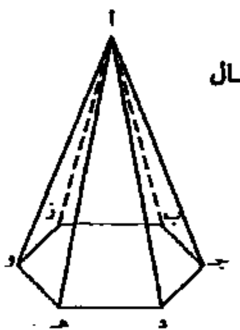
هـ) حرفان متخالفان ومتعامدان ↔أب، ↔دو.

و) مستويان متوازيان أ ب جـ هـ ط ح.

ز) مستويان متقاطعان أب جـ أ د و.

ح) حرف يوازي مستوى. أد، ه ط ح.

ط) حرف يقطع مستوى ب جـ يقطع ج د و.



٣) الشكل المجاور يمثل هرم سداسي قائم. أعط مثال على كل مما يأتي:

أ) مستقيمين متوازيين $\overleftrightarrow{\text{ب ز}} \parallel \overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

ب) مستقيمين متقاطعين $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$.

جـ) مستقيمين متخالفين $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$، $\overleftrightarrow{\text{ب ز}}$.

د) مستويين متقاطعين أ جـ د، ب جـ د.

هـ) مستقيم يقطع مستوى $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ يقطع المستوى ب جـ د.

٤) اذكر ثلاثة أمثلة من البيئة المحيطة بك على:

أ) مستقيمين متقاطعين.

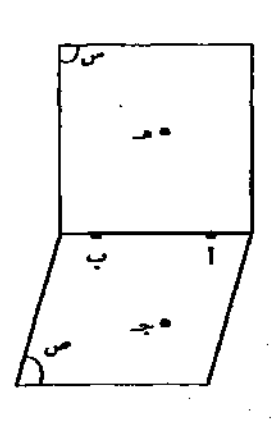
ب) مستقيمين متوازيين.

جـ) مستقيم يقطع مستوى.

د) مستقيم يوازي مستوى.

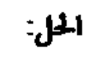
هـ) مستويين متوازيين.

و) مستقيمين متخالفين.



٥) إذا كانت النقط أ، ب، هـ تقع في المستوى س. والنقط أ، ب، جـ تقع في المستوى ص أثبت أن المستويين س، ص يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

الحل:



أ ∋ س، أ ∋ ص

⇐ أ ∋ س ∩ ص

كذلك ب ∋ س، ب ∋ ص

ب ∋ س ∩ ص

إذن المستقيم الذي يحوي النقطتين أ، ب يقع بأكمله في كل من المستويين س، ص إذن المستويان س، ص يتقاطعان في المستقيم أب.

٦) قطعت القطعة المستقيمة أجـ المستوى س في النقطة (ب) رُسم من أ،جـ مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في النقطتين هـ د على الترتيب كما في الشكل. أثبت أن النقط هـ ب، د تقع على استقامة واحدة.

الحل:

يوجد مستوى واحد فقط يحوي المستقيمين المتوازيين أهـ جـ د.

وليكن المستوى ص

أ، جـ ∋ ص

⇐ أجـ يقع في المستوى ص

لكن ب ∋ أجـ

⇐ هـ ب، د ∋ ص

ولأن ه، ب، د ∋ س (بالفرض)

⇐ هـ ب، د ∋ س ∩ ص

ولأن س ∩ ص هو مستقيم هـ ب، د على استقامة واحدة.

* قاعدة (١):

لبناء مستقيم ابحث عن نقطتين في المستوى.

* **قاعدة (٢):**

لبناء مستوى ابحث عن احدى الحالات التالية:

أ. مستقيمان متوازيان.

ب. مستقيمان متقاطعان.

جـ. مستقيم ونقطة خارجه.

* **قاعدة (٣):**

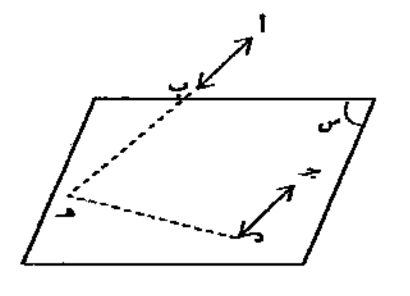
هامة جداً: إذا وقع مستقيم في أكمله في مستوى فإن أي نقطة تقع على ن المستقيم هي تلقائياً تنتمي إلى ذلك المستوى.

(٩-٥) نظريات في التوازي

* **نظرية (١):**

إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى.

البرهان:



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ خارج المستوى س.

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقع في س

حيث $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

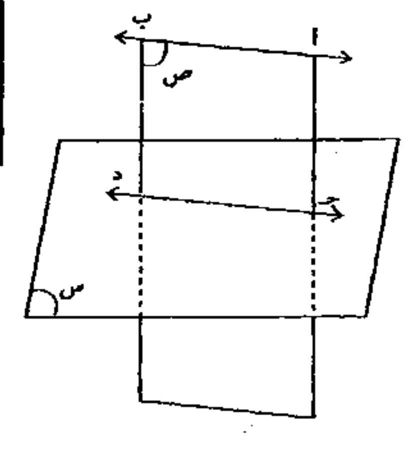
نريد إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // المستوى س

افرض العكس: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ لا يوازي س

⇐ يوجد نقطة مشتركة بين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ والمستوى س ولتكن هـ ⇐ أ هـ د مستوى فيه النقطة د خارج $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⇐ يمكن رسم مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ من النقطة د ويقع في المستوى أ هـ د.

ولأن أب // جـد ⇐ امكن رسم مستقيمين د يوازيان أب. وهذا تعارض.

اي أن أب لا يقطع المستوى ⇐ أب // المستوى س.



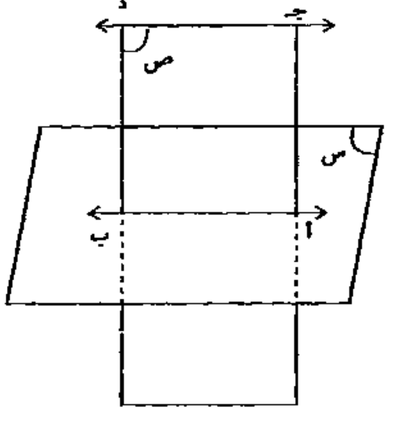
نتيجة:

إذا وازى مستقيم مستوى فإن كل مستوى مار بالمستقيم وقاطع المستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.

توضيح:

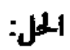
لاحظ أب، جـد يحويهما نفس المستوى س ولا يتقاطعان (لأن أب //س والمستقيم جـد يقع في س)

∴ إذن أب // جـد.



مثال:

أ، ب نقطتان في المستوى س، والنقطتان جـ د خارج المستوى س بحيث أ جـ // ب د، أجـ=ب د. برهن



أن جـد// المستوى س (انظر الشكل)

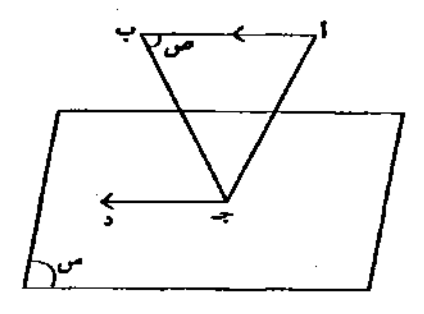
الحل:

بما أن أجـ // دب وأيضاً أ جـ = د ب

⇐ الشكل أ ب د جـ متوازي أضلاع

⇐ جـد // أب إذن جـد // المستوى س (نظرية ١).

مثال:



أثبت أنه إذا وازى مستقيم مستوى، فالمستقيم الذي يمر بأية نقطة من نقط المستوى وموازياً للمستقيم المعلوم يقع بأكمله في المستوى

الحل:

النقطة جـ والمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يحددان مستوى ليكن س ⇐ س، ص يتقاطعان في جـ لكن إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في نقطة أخرى (د) (أي يشتركان في مستقيم) وليكن $\overleftrightarrow{جـ د}$.

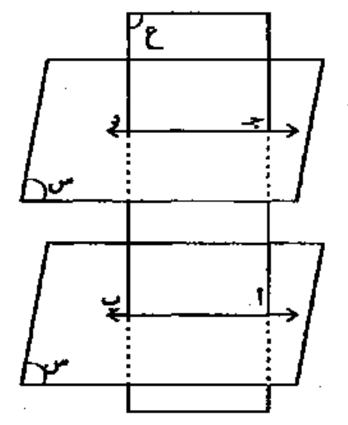
وحيث $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى (س) ⇐ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ (خط تقاطع المستويين س، ص) لكن $\overleftrightarrow{جـ د}$ يقع بأكمله في س ولأنه يمكن رسم مستقيم وحيد من جـ // $\overleftrightarrow{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{جـ د}$ هو المستقيم المرسوم من جـ والموازي للمستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ والواقع بتمامه في المستوى.

* نظرية (٢):

إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه مع المستويين متوازين

البرهان:



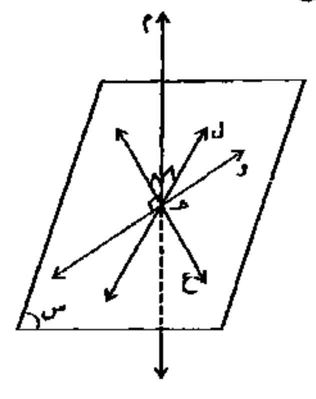
س، ص مستويان متوازيان. ع مستوى ثالث قاطع لهما في $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{جـ د}$ والمطلوب إثبات أن $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ لاحظ أن $\overleftrightarrow{أب}$ يقع في س. $\overleftrightarrow{جـ د}$ يقع في ص. ولا يتقاطعان لأن س // ص ⇐ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$ لأنهما يقعان في مستوى واحد (ع) ولا يتقاطعان.

(٩-٦) التعامد

تعريف:

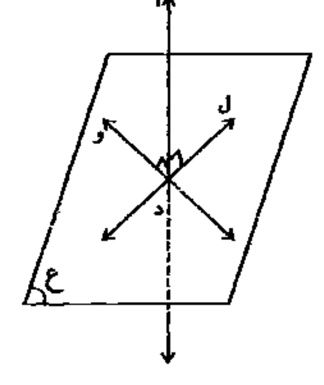
يكون المستقيم عمودياً على مستوى إذا كان عمودياً على جميع المستقيمات الواقعة في المستوى والمارة بنقطة تقاطع المستقيم مع المستوى.

الشكل يوضح المستقيم م الذي يقطع المستوى س في النقطة هـ ويكون عمودياً على المستقيمات ع، و، ل،.....



*** نظرية (١):**

المستقيم العمود على مستقيمين متقاطعين في مستوى يكون عمودياً على مستواهما. الشكل يوضح $\overleftrightarrow{\text{ل}}$، $\overleftrightarrow{\text{و}}$ يشكلان المستوى ع. $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{\text{ل}}$، $\overleftrightarrow{\text{و}}$، فيكون $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ عمودياً على المستوى ع



تعميم:

المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على كل مستقيم فيه.

توضيح :

$\overleftrightarrow{\text{أد}} \perp$ س

$\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ اي مستقيم يقع بتمامه في المستوى س لاحظ من النقطة د يمكن رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{دجـ}}$ بحيث يقع في س ويوازي $\overleftrightarrow{\text{هـو}}$. وبما أن م$\overleftrightarrow{\text{د}} \perp$ $\overleftrightarrow{\text{دجـ}}$ وحيث أ د، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ متخالفان $\Leftarrow$ م$\overleftrightarrow{\text{د}} \perp$ $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$

مثال:

دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$، جـ نقطة على دائرة حيث $\overline{\text{جـ د}}$ تعامد مستوى الدائرة انظر الشكل اثبت أن $\overline{\text{أجـ}}$ ⊥ المستوى د جـ ب.

الحل:

$\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة

⇐ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ (الزاوية المحيطية في الدائرة المقابلة للقطر قائمة)

أي أن $\overline{\text{أجـ}}$ يعامد ب جـ .... (١)

وبما أن جـ د يعامد مستوى الدائرة

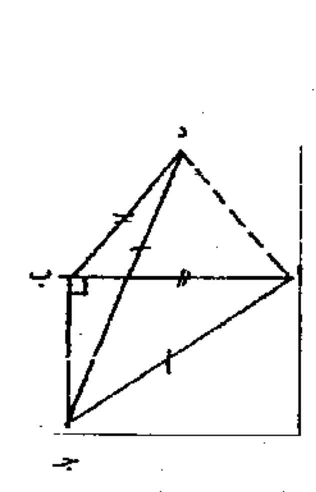
⇐ يعامد مستوى الدائرة

⇐ $\overline{\text{جـ د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ .... (٢)

من (١)، (٢) أ جـ يعامد كل من $\overline{\text{ب جـ}}$ $\overline{\text{جـ د}}$

∴ أ جـ ⊥ المستوى د ب جـ (نظرية ١)

مثال:



أ ب جـ مثلث قائم الزاوي في ب، د نقطة ليست في مستوى هذا المثلث، بحيث أن ب د = ب أ د جـ = جـ أ، اثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ يعامد مستوى المثلث أ ب د.

الحل:

$(\text{أجـ})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2$

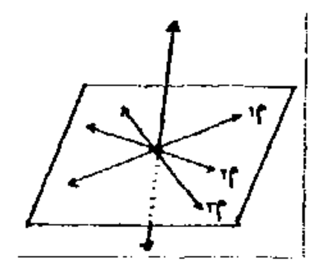
$(\text{جـ د})^2 = (\text{ب جـ})^2 + (\text{ب د})^2$

أجـ = جـ د، أب = ب د

∴ ∢ د ب جـ قائمة ⇐ $\overline{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$

ولأن $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ حسب الفرض

⇐ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب د

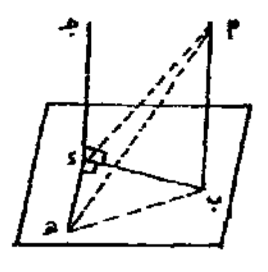


٭ نظرية (٢):

الأعمدة المقامة من نقطة على مستقيم تقع جميعها في مستوى واحد.

٭ نظرية (٣)

المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان



البرهان:

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ عموديان على المستوى س ويتقاطعان معه في النقطتين ب، د، على الترتيب. نريد إثبات $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ في المستوى س بحيث يكون عمودياً على $\overline{\text{ب د}}$، نصل $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{أ هـ}}$، $\overline{\text{ب هـ}}$

(أهـ)^2 = (أب)^2+(ب هـ)^2 (لأن ∢ أ ب هـ قائمة)

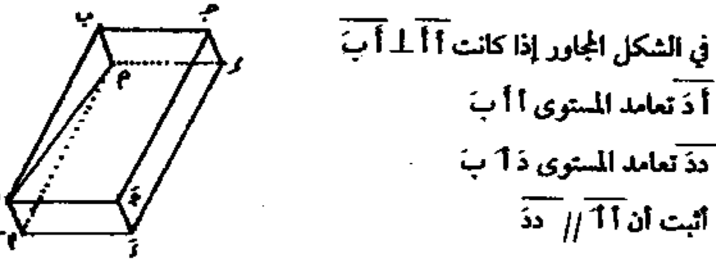
= (أب)^2+(ب د)^2 + (د هـ)^2 (لأن ∢ أ ب هـ قائمة)

= (أد)^2+(د هـ)^2

∴ الزاوية أ د هـ قائمة وعليه $\overline{\text{أد}}$، $\overline{\text{دجـ}}$، $\overline{\text{د ب}}$ تقع في مستوى واحد لأنها عمودية جميعها على دهـ من نقطة واحدة (نظرية ٢)

ولأن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ واقعان في هذا المستوى وعموديان على $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$ ⇐ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

مثال:



في الشكل المجاور إذا كانت أأَ ⊥ أبَ

أدَ تعامد المستوى أأَبَ

ددَ تعامد المستوى دَأَبَ

أثبت أن أأَ // ددَ

الحل:

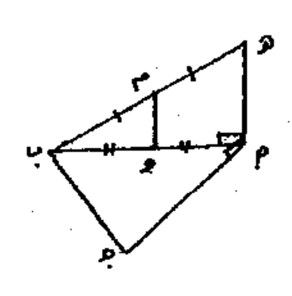
بما أن أدَ ⊥ المستوى أأَبَ ⇐ أدَ ⊥ أأَ (تعريف تعامد مستقيم مع مستوى) وبما أن أأَ يعامد أبَ ⇐ يعامد المستوى دَأَبَ

لكن ددَ يعامد المستوى دَأَبَ (بالفرض) إذن أأَ // ددَ (نظرية ٣)

مثال:

أ ب جـ مثلث، اختيرت نقطة هـ خارج مستوى المثلث أ ب جـ بحيث كان أ هـ عمودياً على كل من أب، أجـ فإذا كانت (و) منتصف أب، (م) منتصف هـ ب. أثبت أن وم تعامد المستوى أ ب جـ

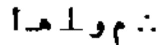
الحل:



هـ أ ⊥ كل من أب، أجـ

∴ هـ أ ⊥ المستوى أ ب جـ (نظرية)

لاحظ م و تصل بين منتصفي ضلعين في المثلث ب هـ أ



∴ م و ⊥ هـ أ

∴ م و ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

نتيجة: إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عمودياً على مستوى، فإن المستقيم الآخر يكون عمودياً على المستوى نفسه.

مثال:

إذا كان م↔، ل↔ مستقيمين متوازيين والنقطة ب خارج مستواهما. رسم ب جـ↔ يعامد م↔ في نقطة جـ، ورسم أ جـ↔ يعامد ل↔ في نقطة أ. أثبت أن أ ب↔ يعامد ل↔ (انظر الشكل)

الحل:

بما أن أ جـ↔ ⊥ ل، م↔ // ل↔

⇐ أ جـ↔ ⊥ م .... (١)

(المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكن عمودياً على الآخر).

لكن ب جـ↔ ⊥ م↔ (بالفرض .... (٢)

من (١) (٢) يكون م↔ ⊥ كل من أ جـ↔ ب جـ↔

إذن م↔ ⊥ المستوى أ ب جـ

وبما أن م↔ // ل↔ (بالفرض)

⇐ ل↔ ⊥ المستوى أ ب جـ (نتيجة)

ومنه ل↔ ⊥ أب↔.



مثال:

أ جـ↔ قطر في دائرة، د نقطة على الدائرة هـ نقطة خارج مستوى الدائرة. رسم د هـ↔ عمودياً على أ د، ثم رسم جـ ؟↔ موازيا للمستقيم دأ. أثبت أن جـ ؟↔ يعامد المستوى هـ د جـ.

الحل:

بما أن $\overleftrightarrow{أد} \perp \overleftrightarrow{هـ د}$

وأن $\overleftrightarrow{أد} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$

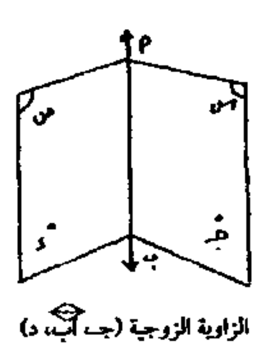
(لأن ∠ أدجـ قائمة) ⇐ $\overleftrightarrow{أد} \perp$ المستوى هـ د جـ

ولأن $\overleftrightarrow{بجـ} // \overleftrightarrow{أد}$ ⇐ $\overleftrightarrow{بجـ} \perp$ المستوى هـ د جـ (نظرية)

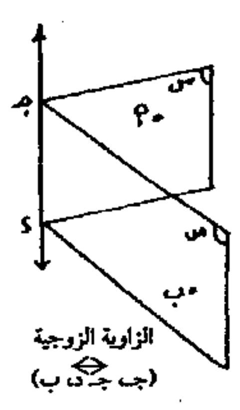
نتيجة: المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان.

(٩-٧) الزاوية الزوجية:

هي اتحاد نصفي مستويين لهما الحرف نفسه. يرمز للزاوية الزوجية بأربعة أحرف، بحيث يمثل الحرف الأول نقطة في أحد نصفي المستويين والحرف الرابع نقطة في النصف الآخر. والحرفان الأوسطان فيمثلان المستقيم المشترك بين المستويين.



الزاوية الزوجية (جـ $\overleftrightarrow{أب}$، د)



الزاوية الزوجية (جـ $\overleftrightarrow{جـ د}$، ب)

يسمى كل من نصفي المستويين س، ص وجهاً للزاوية الزوجية ويسمى المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ الناتج عن تقاطع نصفي المستويين حرف الزاوية الزوجية.

قياس الزاوية الزوجية:

نأخذ أية نقطة على حرف الزاوية الزوجية مثل ؟، نرسم ؟ل ⊥ أب في المستوى س

نرسم ؟م ⊥ أب في المستوى ص

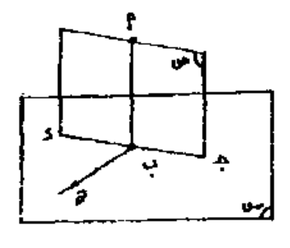
فيكون قياس الزاوية الزوجية ل، أب، م هو قياس الزاوية المستوية ل ؟ م.

> **ملاحظة:** تقاس الزاوية بين مستويين بقياس الزاوية الزوجية بينهما، وإذا كان هذا القياس ٩٠° فإن المستويين متعامدان وبالعكس إذا كان المستويان متعامدين فإن قياس الزاوية الزوجية بينهما ٩٠°.

★ **نظرية (٤):**

إذا كان مستقيم معلوم عمودياً على مستوى معلوم فكل مستوى يحوي ذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوى المعلوم.

البرهان:



نرسم المستقيم ب هـ في المستوى س بحيث ب هـ ⊥ جـ د الآن أب ⊥ س

⇐ أب ⊥ جـ د

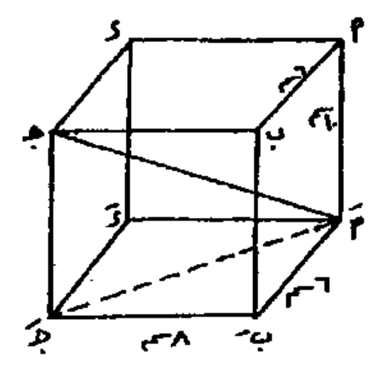
∴ جـ د ⊥ المستوى أ ب هـ

(لأن جـ د ⊥ كل من أب، ب هـ)

قياس الزاوية أب هـ هو قياس الزاوية الزوجية بين س، ص. لكن قياس الزاوية أ ب هـ ٩٠° (لأن أب ⊥ المستوى س نحو عمودي على ب هـ)

∴ س ⊥ ص.

* سؤال:



أ ب جـ د أ بَ جـَ دَ متوازي مستطيلات فيه أ أَ =١٠سم، أب=٦سم، ب جـ =٨سم احسب طول قطره $\overline{\text{أ جـَ}}$ (انظر الشكل)

الحل:

نصل أ جـَ

(أ جـَ)^{2}=(أجـَ)^{2}+ (جـ جـَ)^{2}

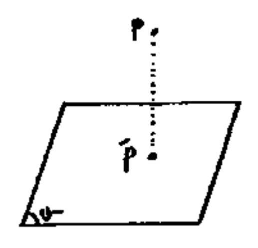
=(أ بَ)^{2} +(بَ جـَ)^{2}+(جـ جـَ)^{2}

= (٦)^{2}+(٨)^{2}+(١٠)^{2}

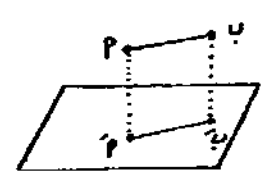
=٢٠٠

∴ أجـ= $\sqrt{٢٠٠}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$سم

(٩-٨) الإسقاط العمودي



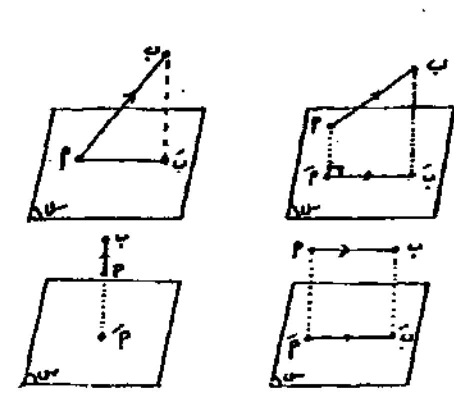
مسقط النقطة أ الخارجة عن المستوى س هي النقطة أَ والتي هي نقطة تقاطع المستقيم العمودي على س والمار في أ.



مسقط القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ على مستوى معلوم هو مجموعة المساقط العمودية للنقط المكونة للقطعة $\overline{\text{أب}}$ على س.



انظر بعض الأوضاع المختلفة لمسقط القطعة أب



تمرين:

أجب عن الأسئلة التالية:

١) هل يمكن أن يكون طول مسقط القطعة المستقيمة أكبر من طول القطعة نفسها (لا).

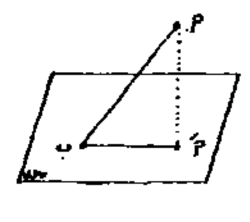
٢) متى يتساوى طولا قطعة مستقيمة ومسقطها على مستوى (إذا كانت القطعة موازية للمستوى).

٣) إذا لم يتقاطع مستقيمان فهل يمكن أن يتقاطع مسقطاهما (نعم)

٤) إذا تساوت قطعتان مستقيمتان في الطول فهل يتساوى طولا مسقطيهما (ليس بالضرورة)

٥) هل مسقط منتصف قطعة مستقيمة هو منتصف مسقط القطعة (نعم).

تعريف:

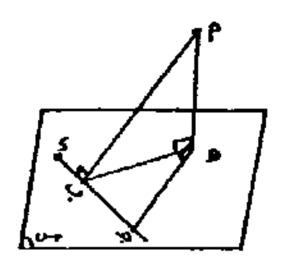


القطعة المستقيمة (أو المستقيم) الواصلة بين أي نقطة (أ) خارج مستوى وأي من نقاط المستوى (عدا مسقط أ) تسمى مائلاً على المستوى الشكل يوضح المائل أب على المستوى س حيث أأَ ⊥ المستوى.

★ نظرية الأعمدة الثلاثة:

إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى وكان المستقيم المائل عمودياً على مستقيم في مستوى. فإن مسقط المستقيم المائل يكون عمودياً على هذا المستقيم.

البرهان:



في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيم في المستوى، أ نقطة خارج المستوى س $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ المستوى س

$\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

بما أن $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ المستوى س ⇐ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ كل مستقيم في المستوى س، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيم في المستوى س ⇐ أ هـ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ولكن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$ (بالفرض)

⇐ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{أهـ}$

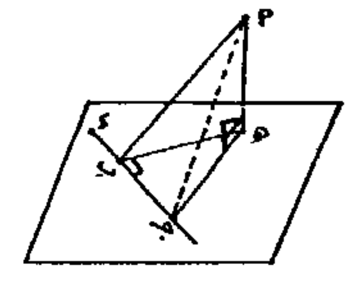
⇐ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ المستوى أ هـ ب ⇐ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ كل مستقيم في المستوى أ هـ ب.

ولأن $\overleftrightarrow{هـ ب}$ يقع في المستوى أ هـ ب. ⇐ $\overleftrightarrow{جـ د}$ ⊥ $\overleftrightarrow{هـ ب}$.

• عكس النظرية:

إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى ليلاقي مستقيماً عمودياً في المستوى، وكان مسقط المستقيم المائل عمودياً على المستقيم المعلوم. فإن المستقيم المائل يكون عمودياً أيضاً على هذا المستقيم

البرهان:



$\overleftrightarrow{جـ د}$ مستقيم في س، أ نقطة خارج المستوى، $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ س، $\overleftrightarrow{أب}$ مائل، $\overleftrightarrow{هـ ب}$ مسقط المائل.

$\overleftrightarrow{أب}$ على س، $\overleftrightarrow{هـ ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

نريد إثبات $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

نصل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في المثلث أ هـ جـ القائم الزاوية في هـ

($\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ س، ⇐ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{هـ جـ}$)

⇐ $(أجـ)^2 = (أهـ)^2 + (هـ جـ)^2$ ....(١)

لكن في المثلث أ هـ ب القائم في هـ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ س فيكون $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{هـب}$.

⇐ $(اهـ)^2=(اب)^2-(ب هـ)^2$ ....(٢)

من (١) و (٢) ⇐ $(أجـ)^2=(هـ جـ)^2+(أب)^2-(ب هـ)^2$

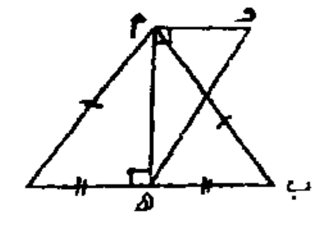
لكن $(هـ جـ)^2-(ب هـ)^2=(ب جـ)^2$ لأن المثلث هـ ب جـ قائم الزاوية في ب (بالفرض)

⇐ $(أجـ)^2=(اب)^2+(ب جـ)^2$

أي أن المثلث أجـ ب قائم الزاوية في ب (عكس نظرية فيثاغورس)

⇐ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـ د}$

مثال:



يمثل الشكل المجاور أ ب جـ فيه أب=أجـ، $\overleftrightarrow{أو}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، هـ منتصف $\overleftrightarrow{ب جـ}$

اثبت أن: $\overleftrightarrow{وهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

الحل:

نصل $\overleftrightarrow{أهـ}$ و $\overleftrightarrow{هـ}$

$\overleftrightarrow{أو}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

$\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ($\overleftrightarrow{أهـ}$ متوسط في أ ب جـ المتساوي الساقين).

$\overleftrightarrow{وهـ}$ مائل على المستوى أ ب جـ بما أن مسقط $\overleftrightarrow{أهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$

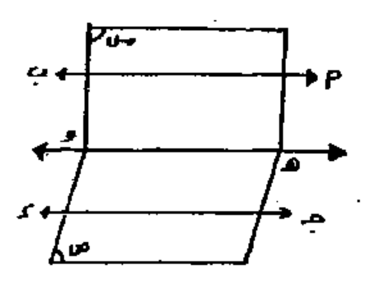
⇐ $\overleftrightarrow{وهـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة).

مثال:

أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ، المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ المستوى للمثلث أ جـ د.
إذا كان أب =٢سم، أجـ= ٤ $\sqrt{٣}$ سم أد=٤سم. جد قياس الزاوية (ب، $\overleftrightarrow{جـ د}$، أ)

أسئلة نهاية الوحدة التاسعة

١) س، ص مستويان متقاطعان، رسم أب ↔ في المستوى س موازياً للمستوى ص، كما رسم المستقيم جـ د ↔ في المستوى ص موازياً للمستوى س، برهن أن أب ↔ // جـ د ↔



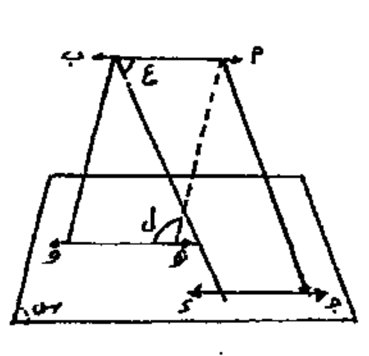
الحل:

أب ↔ // ص ⇐ أب ↔ // هـ و ↔ (خط تقاطع المستويين)

كذلك جـ د ↔ // س ⇐ جـ د ↔ // هـ و ↔

(نتيجة) ⇐ مما سبق ينتج أن أب ↔ // جـ د ↔ لأن المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان)

٢) إذا وازى مستقيم مستوى ومرَّ بالمستقيم مستويان يقطعان المستوى المعلوم فبرهن أن خطي تقاطعهما معه متوازيان.



الحل:

أب ↔ // س، المستوى يحوي أب ويقطع المستوى س في جـ د ↔.

⇐ أب ↔ // جـ د ↔ (نتيجة) ....(١)

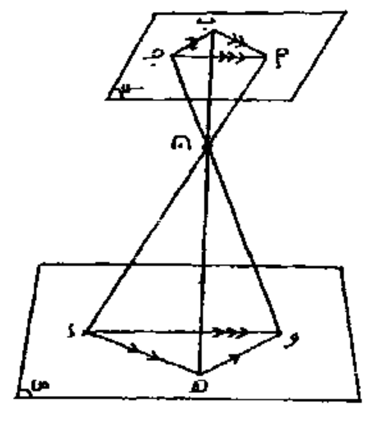
وبنفس الطريقة نبرهن أن أب ↔ // هـ و ↔ ....(٢)

من ١، ٢ ينتج أن جـ د // هـ و (لأن المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان)

٣) إذا كانت ن نقطة خارج المستويين المتوازيين س، ص ومر بالنقطة ن ٣ مستقيمات غير مستوية (لا تقع جميعها في مستوى واحد) فقطعت المستوى س في أ، ب، جـ كما قطعت المستوى ص في د، هـ، و. برهن أن المثلثين أب جـ د هـ و متشابهان.

الحل:

كل مستقيمين متقاطعين في ن يقعان في مستوى واحد.



كذلك:

$\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{هـد}$، $\overleftrightarrow{ب جـ} // \overleftrightarrow{وهـ}$ $\overleftrightarrow{أجـ} // \overleftrightarrow{ود}$

(لأنه إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي التقاطع متوازيان)

المثلث ن أ ب يشابه المثلث ن د هـ

$\Leftarrow \frac{ن أ}{ن د} = \frac{ن ب}{ن هـ} = \frac{أ ب}{د هـ} \Leftarrow$ ... (١)

كذلك المثلثان ن ب جـ ن هـ و متشابهان

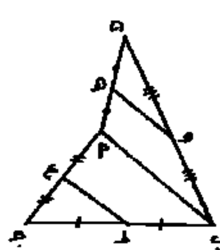
$\Leftarrow \frac{ن ب}{ن هـ} = \frac{ن جـ}{ن هـ} = \frac{ب جـ}{و هـ}$ .... (٢)

وكذلك ن أ جـ يشابه ن د و

$\Leftarrow \frac{ن أ}{ن د} = \frac{ن جـ}{د و} = \frac{أ جـ}{د و}$ .... (٣)

من ١، ٢، ٣ $\Leftarrow \frac{أ ب}{د هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أ جـ}{د و}$

الأضلاع المتناظرة في المثلثين أ ب جـ د هـ و متناسبة ⇐ المثلثان متشابهان.



٤) ليكن أ ب جـ مثلث، م نقطة خارج مستواه إذا كان هـ و يمر بمنتصفي م أ، م ب، وكان ع ط يمر بمنتصفي أ جـ ب جـ اثبت أن هـ و // ع ط

الحل:

هـ و تصل بين منتصف ضلعين في المثلث م ب أ

⇐ هـ و // أ ب ....(١)

وأيضاً في المثلث أ ب جـ

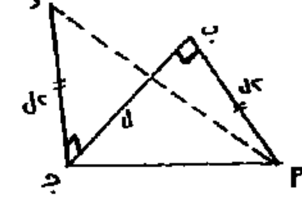
ح ط تصل بين منتصف ضلعين في المثلث

⇐ ح ط // أ ب ....(٢)

من ١، ٢، و هـ // ح ط (المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان).

٥) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. أقيم من جـ عمود على مستوى المثلث وعينت النقطة د على هذا العمود بحيث أب= جـ د = ٢ب جـ اثبت أن أ د = ٣ ب جـ

الحل:



نفرض طول ب جـ =ل فيكون طول أب= جـ د = ٢ل

جـ د ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

⇐ جـ د ⊥ أ جـ في المثلث أ ب جـ

⇐ (أ د)^{٢}= (د جـ)^{٢}+(أ جـ)^{٢}= (د جـ)^{٢}+(أ ب)^{٢}+(ب جـ)^{٢}

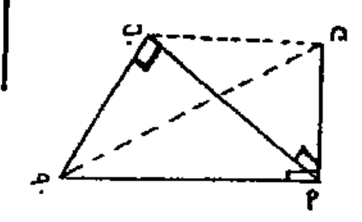
⇐ (أ د)^{٢}= (٢ل)^{٢}+(٢ل)^{٢}+ل^{٢}=٩ل^{٢}

إذن أد=٣ل ⇐ أ د = ٣ب جـ

٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب أقيم من أ عمود على مستوى المثلث ثم فرضت أي نقطة مثل م على هذا العمود برهن أن الزاوية م ب جـ قائمة.

الحل:

المطلوب:



إثبات أن ق(م بˆ جـ) =٩٠

م أ ⊥ مستوى أ ب جـ

$\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

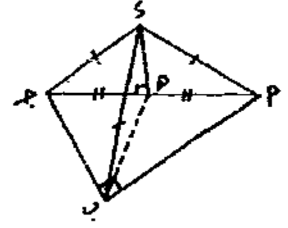
$\overline{\text{أ ب}}$ مسقط المائل م ب

⇐ $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة)

أي أن ق (م بˆ جـ) = ٩٠

٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب والنقطة د مفروضة خارج مستواه وعلى أبعاد متساوية من رؤوسه، فإذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ أثبت أن $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

الحل:



نصل ب هـ، د هـ متوسط في المثلث أ د جـ المتساوي الساقين.

⇐ $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ....(١)

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون

ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

⇐ أ هـ = هـ جـ = ب هـ

لكن أ، هـ مثلث قائم ⇐ (د هـ)^{٢}= (أ د)^{٢} − (أ هـ)^{٢}

ولكن (أد = دب، أ هـ = بَ هـ)

⇐ (د هـ)^{٢}= (د ب)^{٢} − (ب هـ)^{٢} ⇐ (د ب)^{٢}= (د هـ)^{٢} − (ب هـ)^{٢} أي أن ق(د ؟ ب) = ٩٠ (عكس نظرية فيثاغورس)

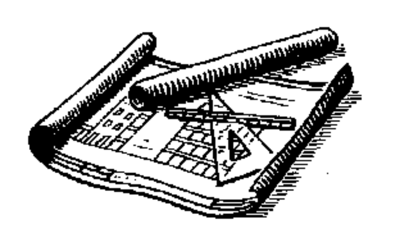
⇐ $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ ب}}$ ....(٢)

من ١، ٢ $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{أ جـ}}$ $\overline{\text{ب هـ}}$

⇐ $\overline{\text{د هـ}}$ ⊥ مستوى أ ب جـ

الوحدة العاشرة

طرائق واستراتيجيات تدريس الهندسة



الوحدة العاشرة
طرائق واستراتيجيات تدريس الهندسة

(١٠-١) مقدمة:

الرياضيات ليست مجرد مجموعة من الحقائق والمعلومات في ميادين معينة، ولكنها بالدرجة الأولى طريقة للتفكير واتجاه في مواجهة المشكلات المختلفة.

ومن أجل ذلك فإن الاهتمام بتدريس مادة الرياضيات يجب ألا يقتصر على توصيل الحقائق للتلاميذ، ولكن يجب أن نهتم باكتشاف الحقائق وطريقة الحصول عليها واستخداماتها وعلاقتها مع غيرها. ولتأكيد نجاح عملية التدريس في تحقيق الأهداف المرجوة من تعليم الرياضيات يجب أن تهتم عملية التدريس بأن يكتسب التلاميذ قدرات ومهارات أساليب التفكير الإبداعي.

ولما كانت الهندسة من فروع الرياضيات الأساسية التي تعتمد دراستها بالدرجة الأولى على الأساليب المتقدمة في التفكير، فهي بالتالي من أحسن المجالات التي يمكن استثمارها في تنمية التفكير الإبداعي، والتي تهتم بالأهداف المرتبطة بالعمليات العقلية العليا. وتنحصر مسؤولية المعلم في أن يثير دافعية الطلاب ويشجعهم على دراسة الهندسة بشكل مشوق في مناخ وبيئة تعلم مناسبة.

ولا تعتبر الهندسة مجرد فرع من فروع الرياضيات، ولكنها تعتبر أساسها وجذورها، فهي تركز على التعبير البصري الذي يخاطب العقل والعين وهذا بالتحديد ما تركز عليه دراسة الهندسة.

(١٠-٢) أهمية الهندسة:

للهندسة دور أساسي في أنشطة الحياة ومشكلاتها المختلفة، فلا يمكن لأي فرد أن يستغني عن الهندسة، لأنها ضرورية لتلبية متطلبات الحياة الأساسية لكل إنسان من مسكن ومأكل وملبس ومشرب. وتتدخل الهندسة في تفاصيل حياتنا

اليومية البسيطة منها والمعقدة، مثل التعرف إلى الوقت، وباقي نقودنا بعد شراء شيء ما، وتنظيم ميزانية البيت أو تسوية دفتر الشيكات. وتستخدم الحسابات الهندسية في الطبخ والقيادة والبستنة والخياطة، ونشاطات عامة عديدة أخرى. وتؤدي الهندسة كذلك دورًا في العديد من الهوايات والألعاب الهندسية .

ولكن أهمية الهندسة لا تنحصر في استخداماتها في أنشطة الحياة اليومية فحسب، بل تتعداها إلى ما يأتي (النعواشي،٢٠٠٧):

١) الهندسة مهمة للعلوم الأخرى، فمعظم العلوم كالفيزياء والكيمياء والفلك تستخدم الهندسة في موضوعاتها، مما يستلزم امتلاك الطلبة لبعض الأساسيات في الهندسة ليتمكنوا من استيعاب موضوعات العلوم الأخرى. كما تعتمد العلوم الإنسانية كالاقتصاد، وعلم النفس، وعلم الاجتماع بشكل كبير على الهندسة، ففي الصناعة تساعد الهندسة في التصميم، والتطوير، واختبار جودة الإنتاج والعمليات التصنيعية، وتُستخدَم في التجارة لإجراء المعاملات المتعلقة بالبيع والشراء وحفظ السجلات، وساعات عمل الموظفين ورواتبهم. ويستخدم المتعاملون مع البنوك الهندسة لمعالجة واستثمار النقود، وحساب نسبة المخاطرة وحساب الرسوم اللازمة لتغطية التأمين في شركات التأمين، بالإضافة إلى دورها في علم الهندسة وتصميم الجسور والمباني والسدود والطرق السريعة والأنفاق والعديد من المشاريع الهندسية .

٢) الهندسة تُعلّم الطلبة المنطق والتفكير العلمي المتسلسل، مما يضفي على شخصية الطلبة الاتزان في طرح الموضوعات، والموضوعية في التفكير، والدقة في استخلاص النتائج والنقد البناء، وما أحوجنا في هذا العصر لتلك الصفات الحضارية التي يكتسبها الطلبة بفضل دراسة الهندسة.

٣) الهندسة تعلم الطلبة طرق حل المشكلات بأسلوب علمي دقيق، وذلك عن طريق حل المسائل والتمارين الهندسية، مما يساعدهم على حل مشكلات حياتية أخرى قد تواجههم.

٤) التجريد في الهندسة مؤشر لرقي العقل البشري، فالتجريد الذي نلاحظه في العديد من ميادين الهندسة ليس عيباً فيها، بل هو مؤشر على تطور العقل

البشري والفكر الإنساني، بحيث يمكن التعامل مع مفاهيم مجردة غير محسوسة يحتاجها الفرد في علوم أخرى أو مراحل قادمة من حياته، ومن الضروري أن يتناسب مستوى التجريد مع المستوى المعرفي للفرد المتلقي للمعرفة الهندسية، فالمسائل التجريدية في الهندسة الآن قد تكون واقعاً محسوساً في وقت لاحق.

ويؤكد كثير من المربين في مجال تعليم الرياضيات، على أن نظرة الخوف والكره للهندسة من جانب التلاميذ، ترجع إلى طريقة عرض الهندسة في حجرات الدراسة، التي ينبغي تغييرها، بحيث يساعد تدريس الهندسة على تدريب التلاميذ على استخدام أساليب التفكير مثل التفكير التأملي والتفكير العلاقي والتفكير الناقد .

ويهدف تدريس الهندسة إلى توضيح معنى البرهان وبيان أهمية الدقة الرياضية، والشعور باللذة عند اكتشاف الحقيقة أو المفهوم أو النظرية الهندسة. فتعليم الهندسة يمكن التلميذ من الاقتناع ببرهنة الأشياء، ويدربه على التفكير السليم، ويمده بالإمكانات اللازمة للاستدلال على شئون الحياة التي يتعرض لها.

مما سبق يتضح أن الرياضيات بصورة عامة والهندسة بصفة خاصة يجب أن نهتم في تدريسها بالأهداف المرتبطة بالعمليات العقلية العليا وأهمها المهارات المرتبطة بالتفكير والتي ترقى بالتلميذ إلى التفكير الإبداعي.

ولكي يتحقق الإبداع عند تدريس الهندسة لا بد من أن يتبع معلموا الرياضيات الخطوات التالية:

١) ألا تعرض النظرية الهندسية أو المفهوم الهندسي المراد دراسته على التلميذ في بداية الدرس. بل نجعله يتداول الأدوات التعليمية باستخدام التفكير الإبداعي والعمل من جانب التلميذ. وبتوجيه الأسئلة من جانب المعلم يستطيع التلميذ أن يقترح تعريفاً أو يبني نظرية أو قاعدة عامة.

٢) ألا يعرض برهان النظرية أو التمرين الهندسي جاهزاً على التلميذ، بل في ضوء مجموعة من التعريفات والمسلمات والبيانات التي لديه تجعله يستخدم مهارات التفكير الإبداعي من الأصالة والمرونة والطلاقة وحساسية المشكلات في كتابة البرهان بطريقة منطقية.

٣) ألا تعطى التمرينات الهندسية التطبيقية على النظرية للتلميذ بهدف استخدام النظرية في حل هذه التمرينات، ولكن بهدف تطبيق التلميذ لمهارات التفكير الإبداعي التي في ضوئها يحل التمرين، والتلميذ هنا لا يطبق فقط بل يقترح ويفكر ويغير ويبرهن.

٤) أن يستخدم التقويم المستمر أولاً فأولاً في بداية ونهاية كل درس للوقوف على مدى فهم التلميذ للمدخل المتبع والأسلوب الجديد .

وتعد المفاهيم الهندسية (Geometrical Concepts) اللبنات الأساسية في البناء الهندسي، وذلك لأن المهارات الهندسية ماهي إلا تطبيق للمفاهيم ووضعها في صورة قواعد وخوارزميات تستخدم في حل المسائل الهندسية المدرسية، كما أن المبادئ والتعميمات هي عبارات رياضية تضع قواعد وقوانين للعلاقة بين مفهومين رياضيين أو أكثر وهي تمثل الهيكل الرئيسي للبناء الهندسي.

وتوجد بطبيعة الحال أنشطة مهمة في دروس الهندسة ولكن الأكثر أهمية هو نمو المفاهيم وذلك لأن التعلم الروتيني بدون إدراك المفاهيم أو البنى (Structures) يوفر مميزات على المدى القصير في سرعة الأداء ولكن هذه المميزات لا تقارن من حيث بقاء الأثر أو توفير الأساس للتعلم المستقبلي.(حمزة والبلاونة، ٢٠١٢)

(١٠-٣) المفهوم الهندسي:

يمكن تعريف المفهوم بطرق متعددة، ولكن معظمها تتفق على أن المفهوم هو تركيب عقلي (Mental construct) يتكون من تجريد (Abstraction) خاصية أو أكثر من حالات جزئية متعددة يتوفر في كل منها هذه الخاصية حيث تعزل هذه الخاصية مما يحيط بها في أي من هذه الحالات وتعطي اسماً أو رمزاً (بدوي، ٢٠٠٩؛ أبو زينة، ٢٠١٠).

فالمربع مثلا تجريد للخصائص الآتية:

- شكل هندسي مستوى مغلق.
- يتكون من أربع قطع مستقيمة متساوية.
- جميع الزوايا قوائم.

وهذه الخصائص تسمى أساسية (جوهرية) (Critical) بمعنى إذا لم تتوافر أي منها فلا تتكون الصورة الذهنية وبالتالي لا يتشكل المفهوم.

وهناك خصائص غير جوهرية تنبثق من المفهوم نفسه ولا تدخل في تشكيل صورته بالرغم من توافرها في جميع العناصر التي تشكل المفهوم مثل القطر في المربع.

ويمكن تقديم تعريف أبسط للمفهوم على النحو الآتي: هو الصفات أو الخصائص المشتركة بين مجموعة من الأشياء، تساعد على اتخاذ القرار بانتماء شيء لهذا المفهوم.(حمزة والبلاونة، ٢٠١٢)

والمفهوم الهندسي يجب أن يتوافر فيه ما يأتي:

- أن يكون مصطلحا أو رمزا ذا دلالة لفظية أي يمكن تعريفه.
- أن يكون تجريدا للخصائص المشتركة لمجموعة من الأشياء أو الأحداث أو المواقف غير المتشابهة.
- أن يكون شاملاً في تطبيقه فلا يشير إلى موقف معين بل يشير إلى كافة المواقف التي تتضمنها مجموعة ما .

(١٠-٤) تصنيف المفاهيم الهندسية:

تصنف المفاهيم الهندسية بطرق عده منها (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

التصنيف الأول: حسب درجة تعقيدها المعرفي أو مستوى تجريدها:-

١- مفاهيم حسية (واقعية) (Concrete): وهي التي لها أمثلة محسوسة كمفهوم المكعب والكرة.

٢- مفاهيم مجردة (Abstract): وهي التي ليس لها أمثلة محسوسة كمفهوم الجذر التربيعي والنسبة والتناسب.

التصنيف الثاني:حسب حاجتها للتعريف:

١- مفاهيم معرّفة: هي مفاهيم لا تكون واضحة وتحتاج لتعريف مثل: مفهوم العدد الزوجي، العدد الأولي، المربع، المستطيل ....

٢- مفاهيم غير معرفة: وهي المفاهيم التي تكون واضحة وبديهية، ولا تحتاج لتعريف. مثل: مفهوم النقطة، المستقيم، المستوى

التصنيف الثالث: حسب عدد الخصائص (الصفات) التي تحتاجها:

١- مفاهيم ذات خاصية واحدة (Single Property Consepts). وهي تلك المفاهيم التي تشتمل خاصية واحدة مثل مفهوم الشكل المغلق.

٢- مفاهيم ربطية (Conjunctional Concepts) وهي المفاهيم التي يستخدم في تحديدها أداة الربط "و" بمعنى انه حتى ينتمي الشيء لذلك المفهوم يجب أن تتحقق عدة خصائص في نفس الوقت، مثل مفهوم المعين، والعدد الأولي، العدد النسبي، المستطيل، المثلث، التقاطع في المجموعات.

٣- مفاهيم فصلية (Disjunctional Concepts) وهي المفاهيم التي يستخدم في تحديدها أداة الربط "أو" وتتوافر فيها صفة واحدة على الأقل من عده صفات محددة مثل مفهوم أكبر أو يساوي، وأصغر أو يساوي، الاتحاد في المجموعات، العدد الصحيح، العدد الصحيح غير السالب.

٤- مفاهيم علاقية (Relational concpts): وهي المفاهيم التي تشتمل علاقة بين طرفين، مثل مفهوم المساواة (=)، +، -، ×، ÷، الاتحاد، التقاطع، >، <.

(١٠-٥) الشروط الضرورية لتعلم المفاهيم الهندسية:

لكي يتم تعلم المفاهيم الهندسية يجب توفر شروط ضرورية منها.(حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

١- يجب أن يكون لدى المتعلم المعلومات الضرورية والمهارات والخبرات المطلوبة لتعلم مفهوم جديد.

فعندما يكون لدى المتعلم خلفية تمكنه من فهم وإدراك خواص مشتركة، وعلاقات، وأنماط وبنية من الأفكار فحينئذ تكون لدية المقدرة على تعميم وصياغة المفهوم، فمثلاً: الكسور الجبرية لا يمكن التمكن منها إذا كان فهم المتعلم ضئيلا لـ الأعداد النسبية ومعنى المضاعف المشترك، وعدم إمكانية القسمة على الصفر، والعنصر المحايد الضربي.

٢- أن يكون لدى المتعلم الدافعية والرغبة للاشتراك في أنشطة التعلم.

فالمتعلم يتعلم ما يعمله ويراه ويشعر به ويفكر فيه، أي أن التعلم ممكن فقط إذا استجاب المتعلم بنفسه لموقف التعلم، فبدلا من أن نطلب من الطالب أن يتعلم الخاصية التجميعية في الجمع(Associative Law)، فإن من الأفضل أن نطلب منه البحث عن طريقة مختصرة (Shortcut) لحل تمارين مثل ٣٧+٥٢+٤٨ ، ٢٤٣+٩٨٧+١٣

٣- أن يكون لدى المتعلم المؤهلات حتى يقدر على الاشتراك في أنشطة التعلم.

تعلم المفاهيم الهندسية عملية عقلية تتضمن أنشطة مثل التعامل اليدوي (Manipulating)، والرؤية (Visualizing)، الاستماع، والقراءة، والحساب، والكتابة، والتفكير، والتجريد، والتعميم، والترميز (Symbolizing)، وهذا يعني أنه لكي يتم تعلم المفاهيم يجب أن يقدر المتعلم على أداء العمليات سالفة الذكر وعلي ذلك لا يجب أن نتوقع من الطالب حل معادلات الدرجة الثانية (Quadratic Equations) إذا كان لا يمكنه حل المعدلات الخطية.

٤- أن يعطى بعض التوجيهات والإرشادات حتى تكون الدافعية محفوظة (Preserved) والتعلم فعال (Efficient).

إن التعلم بالمحاولة والخطأ أو بالتأمل قد لا يمكن المتعلمين من تحقيق أهدافهم لذلك يجب تقديم بعض الارشادات لهم حتى يمكنهم إدراك

الخصائص المشتركة، ولهذا فمفهوم طرح أعداد صحيحة يكون سهلاً إذا تم مساعده الطالب في حساب المسافات بين نقطتين وجمع المعكوس:

(٣)– (٧) = ٣ + (–٧) = – ٤

(–٥) –(–٩) = (–٥) + (+٩) = (+٤)= ٤

(–٥) –(–٩)= ٤

٥– يجب أن يزود المتعلم بمواد (Materials) ووسائل تعليمية ملائمة.

٦– يجب إعطاء المتعلم وقتا كافيا للاشتراك في أنشطة التعلم.

إن عملية اكتشاف مفهوم بطريقة مستقلة تستغرق وقتا لأن المتعلم يستخدم خبراته السابقة ويحاول توظيفها في تعلم المفهوم الجديد، وبالتالي يحتاج هذا الجهد إلى وقت إضافي أطول.

وباختصار فنحن نتعلم المفهوم الهندسي بالطريقة الآتية:

- نصنف الأشياء (Objects)، والأحداث (Events) والأفكار إلى فئات وأصناف (Categories).
- نعي (Aware) العلاقات داخل هذه الأصناف المتضمنة.
- نوجد نمطاً (Pattern) يقترح العلاقات أو البنية (Structure) .
- نصيغ تعريفاً (خلاصة) يصف نمط الأحداث أو الأفكار.

(١٠–٦) مبادئ أساسية في تدريس المفاهيم:

يقدم (شاهين، ١٩٩٠، www.afaqmath.com) بعض الإرشادات التي تفيد المعلم في تدريسه للمفاهيم الهندسية تتلخص في الآتي:

١– اعرف طبيعة المفهوم قيد التدريس(حسي– مجرد– فصلي– ربطي).

٢– حدد الخصائص المميزة للمفهوم قيد التدريس بدقة. لان ذلك يساعدك على إعطاء تعريف دقيق ومحدد للمفهوم.

٣– أعطى أمثلة إيجابية للمفهوم قيد التدريس (مثلا العدد ١٢ مثال إيجابي على مفهوم العدد الزوجي، أما العدد ١٣ فهو مثال سلبي (لا مثال) على

مفهوم العدد الزوجي) وكلما زاد التنويع بين الأمثلة الإيجابية والأمثلة السلبية زادت سهولة تعلم المفهوم.

٤- نوّع في الخبرة التي ينبثق منها المفهوم قيد التدريس ولا تطلب من الطلبة الوصول إلى مرحلة التجريد والتعميم من نشاط واحد.

٥- حدّد العلاقة بين المفهوم قيد التدريس والمفاهيم التي تعلمها الطالب سابقا (حدد أوجه الشبه والإختلاف).

(١٠-٧) خطوات تدريس المفاهيم الهندسية

عند تقديم أي مفهوم رياضي جديد داخل حجرة الصف غالبا ما يبدأ المعلم أو المعلمة بإعطاء تعريف المفهوم، ثم يعرض أمثلة توافق ذلك المفهوم، ثم بعرض أمثلة لا تتفق مع المفهوم، ومن الطبيعي تعليم المفاهيم وعرضها من معلم لآخر حتى أن التباين قد يحدث لدى نفس المعلم أو المعلمة في عرض مفهومين مختلفين لصف واحد كأن يقدم أمثلة على المفهوم ثم يقدم التعريف ثم يعطي أمثلة لا تتفق مع المفهوم وقد يقوم معلم أخر أو معلمة أخرى بتطبيق بعض العناصر وليس كلها. ولتدريس المفاهيم الهندسية يمكن اتباع أحد الخطوات أو الاتجاهات الآتية (أبو زينة، ٢٠١٠؛ عباس والعبسي، ٢٠٠٩؛ بدوي ٢٠٠٩):

◆ **التمهيد:**

وهي خطوة عامة يقوم بها المعلم في بداية كل حصة، تشمل بشكل عام أربعة أشياء يقوم بها المعلم هي:

١-كتابة عنوان الدرس.

٢- كتابة أهداف الدرس على السبورة (أو ذكرها للطلبة).

٣- مراجعة المتطلبات السابقة الضرورية لفهم موضوع الدرس.

٤- إثارة دافعية الطلبة للدرس وتشويقهم لدراسته: إن إثارة دافعيـة الطلبـة لموضوع الدرس يشكل عاملاً مهماً قد يحـدد مـدى فهمهـم واسـتيعابهم للدرس، ولكنه يحتاج لتحضير جيد من المعلـم، ولقـدرة كـبيرة مـن قبـل المعلم على ابتكار وإيجاد تطبيقات لموضوع الـدرس بحيـث تكـون مـثيرة للانتباه وجذابة ومناسبة للطلبة، ويمكن للمعلم إثارة دافعية الطلبة بعـدة طرق مثل:

أ) توضيح أهمية الموضوع الذي سيدرسه الطلبة في حياتهم اليومية.

ب) طرح مشكلة يحتاج حلها لاستخدام موضوع الدرس.

ج) إثارة انتباه الطلبة إلى أن ما سيتعلمونه مهم للامتحان، وسيـسألهم عنـه في نهاية الحصة، وهذه الطريقة غير مفضلة.

◆ الخاصية الواحدة

كأن نذكر خاصية واحدة فقط من خصائص المفهوم التي تسمى بمجموعـة الإسناد للمفهـوم، ومجموعـة الإسـناد وهـي الـصفات أو الخـصائص المميـزة للمفهوم.

مثال: المثلث له ثلاثة أضلاع المفهوم هو المثلث والخاصية هي أن له ثلاثـة أضلاع .

◆ الشرط الكافي

يتم مناقشة خاصية واحدة أو أكثر من عناصر مجموعـة الإسـناد للمفهـوم من حيث كفايتها، وهنا نستخدم أداة الشرط الكافي : إذاً فإن.

مثال: إذا حقق عدد ما معادلة ما فانه يكون جذراً أو صفراً لها.

المفهوم هو الجذر، والخاصية هي إذا حقق عدداً ما معادلة ما.

◆ الشرط الضروري

يتم مناقشة الشرط أو الشروط اللازم توفرها في الشيء ليكـون عنـصرا في مجموعة إسناد المفهوم وهذه الخطوة تحوي كلمة يجب.

مثال: حتى يكون الاقتران قابل للاشتقاق عند نقطة يجب أن يكون متصل عند تلك النقطة.

المفهوم هو قابلية الاقتران للاشتقاق عند نقطة والشرط الضروري هو الاتصال عند تلك النقطة.

◆ التصنيف

نناقش في هذه الخطوة مجموعة أشمل تحوي مجموعة إسناد المفهوم وعادة يقدم المفهوم كتعريف.

مثال: اقتران الدرجة الثانية هو اقتران كثير حدود

المفهوم هو اقتران الدرجة الثانية، والمجموعة الأشمل هي اقتران كثير حدود.

◆ التحديد

ومن خلاله يتم تحديد الشيء الذي يطلق عليه المفهوم عن طريق ذكر خصائصه الكافية والضرورية.

مثال: المربع شكل رباعي متساوي الأضلاع زواياه قائمة.

المفهوم هو المربع، وخصائصه الكافية والضرورية هي رباعي متساوي الأضلاع وزواياه قائمة .

◆ التحليل

هنا نسمي مجموعة جزئية أو أكثر من مجموعة إسناد ذلك المفهوم .

مثال: الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص هي قطوع مخروطية.

المفهوم قطوع مخروطية ومجموعة الأشياء الجزئية هي الدائرة والقطع المكافئ والقطع الناقص.

◆ المقارنة

نقوم بعمل مقارنة بين عناصر مجموعة إسناد المفهوم مع عناصر لا تنتمي لهذه المجموعة.

مثال: يختلف القطع الناقص عن القطع المكافئ في أن له بؤرتان بدلاً من بؤرة واحدة.

المفهوم هو القطع الناقص، والمقارنة هي بؤرتان بدلا من واحدة .

◆ المثال واللامثال مع التبرير

نناقش أمثلة على المفهوم ثم إعطاء لا أمثله أي تلك الأمثلة التي لا تتفق مع المفهوم ولا تنتمي إلى عناصر إسناده.

مثال: جذر العدد اثنين ليس عددا نسبيا لأنه لا يحقق شرط العدد النسبي، لذلك فهو لا مثال على العدد النسبي، وهو مثال على العدد غير النسبي.

◆ التعريف

وهذا أكثر الاتجاهات شيوعا واستخداما في تدريس المفاهيم الهندسية لأنه يعتبر أكثر دقة وتحديداً للمفهوم، ولكن يؤخذ عليه صعوبته على بعض الطلبة خاصة بطيئي الفهم وهنا نبدأ بتقديم تعريف المفهوم ثم إعطاء أمثلة تتوافق معه ثم أمثلة لا تتوافق معه لإزالة سوء الفهم الذي قد يحدث لدى الطلبة نتيجة عدم قدرتهم على تمييز الخصائص الأساسية للمفهوم كمثال تعريف القطع الزائد على انه مسار نقطة تتحرك في المستوي بحيث يبقى الفرق الموجب بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي مقدارا ثابتا.

المفهوم هو القطع الزائد والتعريف هو مسار نقطة ونكمل التعريف.

◆ الرسم البياني

تحتاج الكثير من المفاهيم الهندسية إلى استخدام هذا الأسلوب لتوضيحها، فالمفاهيم الهندسية كالمربع والقطع الناقص تحتاج إلى رسمها بيانيا كي يستوعبها الطلبة ويدركوها.

وهناك مفاهيم أخرى يكون التمثيل البياني لها جزءاً مكملاً لخطوات أخرى يقوم بها المعلم لشرح اقتران الدرجة الأولى مثلاً.

الخطوات الأساسية لتدريس المفاهيم الهندسية. (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢)

يمكن القول أن تدريس المفاهيم الهندسية يمر بالخطوات الأساسية الآتية، مع مراعاة إضافة خطوات أخرى مما سبق ذكره حسب طبيعة المفهوم الذي نقوم بتدريسه، وهذه الخطوات الأساسية هي:

١. التمهيد: وتشتمل العناصر الأربعة التي سبق توضيحها.
٢. التعريف: يقدم المعلم هنا تعريف المفهوم.
٣. المثال: يقدم المعلم والطلبة أمثلة ايجابية على المفهوم، بمعنى أنهم يقدمون أمثلة تنتمي للمفهوم وتحقق خصائصه، مع التبرير.
٤. اللا مثال: يقدم المعلم والطلبة أمثلة سلبية على المفهوم، بمعنى أنهم يقدمون أمثلة لا تنتمي للمفهوم ولا تحقق خصائصه، مع التبرير.
٥. التصنيف: يقدم المعلم أسئلة يطلب فيها من الطلبة تصنيف أشياء متعددة حسب انتمائها للمفهوم.

ويجب الإشارة هنا إلى أنه يمكن للمعلم ترتيب هذه الخطوات حسب ما يراه مناسباً للمفهوم الذي يقوم بتدريسه، فمثلاً يمكن أن يكون الترتيب كالتالي:

وفيما يلي أمثلة لتدريس بعض المفاهيم الهندسية:

مثال(١): تدريس مفهوم المربع:

١- التمهيد:

- يكتب المعلم عنوان الدرس على السبورة

- يكتب المعلم أهداف الدرس وهي:

أن يتعرّف الطالب مفهوم المربع

أن يميز الطالب المربع عن أشكال هندسية أخرى (أو يصنف الطلبة أشكالا هندسية إلى مربع وغير ذلك)

- **إثارة دافعية الطلبة وتشويقهم وإثارة اهتمامهم بالدرس:** وذلك عن طريق طرح مشكلة أو مسألة يحتاج حلها لاستخدام المربع.(ويمكن إثارة الدافعية بطرق أخرى كما ذكر سابقاً)
- **مراجعة المتطلبات السابقة:** يراجع المعلم الطلبة بمفهوم الضلع، الزاوية القائمة.

٢- المثال:

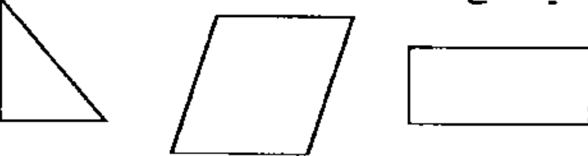
الأشكال الآتية جميعها مربعات (يطلب المعلم من الطلبة استنتاج خصائص المربع من هذه الأشكال)

٣- التعريف:

يقدّم المعلم تعريف المربع: "هو شكل رباعي مغلق أطول أضلاعه متساوية وزواياه قوائم"

٤- اللا مثال:

الأشكال الآتية ليست مربعات (يطلب المعلم من الطلبة ذكر السبب في كونها لا تنتمي للمربع)



٥- التصنيف:

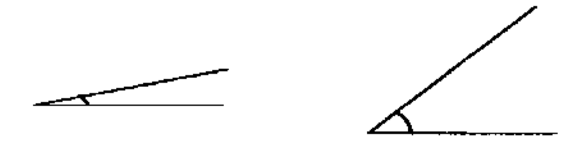
لوّن المربع فيما يأتي:

مثال (٢): تدريس مفهوم الزاوية الحادة:

١- التمهيد:

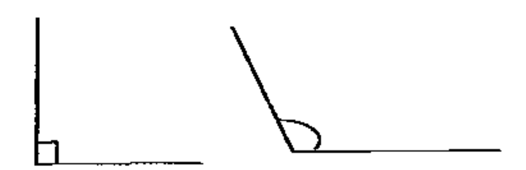
- يكتب المعلم عنوان الدرس على السبورة
- يكتب المعلم أهداف الدرس وهي:
  * أن يتعرّف الطالب مفهوم الزاوية الحادة
  * أن يميز الطالب الزاوية الحادة عن غيرها من أنواع الزوايا
- إثارة دافعية الطلبة وتشويقهم وإثارة اهتمامهم بالدرس: وذلك عن طريق طرح مشكلة أو مسألة يحتاج حلها لاستخدام الزاوية الحادة.
- مراجعة المتطلبات السابقة: يراجع المعلم الطلبة بمفهوم الزاوية، كيفية قياس الزاوية.

٢- المثال: الأشكال الآتية تمثل زوايا حادة (مع توضيح السبب)

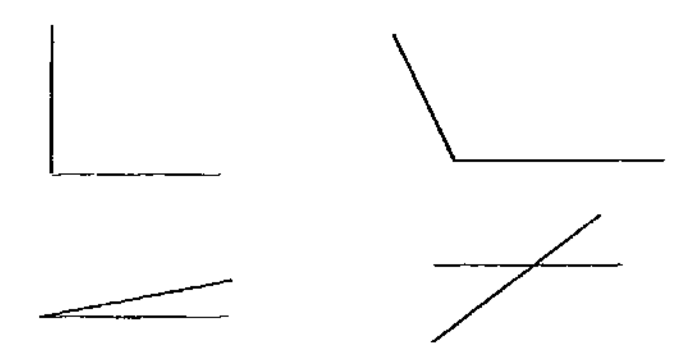


٣- التعريف: يقدّم المعلم تعريف الزاوية الحادة: "هي الزاوية التي يكون قياسها أكبر من صفر° وأقل من٩٠ °"

٤- اللا مثال: الزوايا الآتية ليست حادة (مع توضيح السبب):



٥- تحرك التصنيف: سؤال : أي الزوايا التالية حادة وأيها ليست حادة:



(١٠-٨) التعميمات الهندسية (Geometrical Generalization)

تعريف التعميم الهندسي :

يُعرّف التعميم في الرياضيات بأنه عبارة لفظية أو رمزية (جملة جبرية) تنطبق على مجموعة من الأشياء، وتحدد علاقة بين مفهومين أو أكثر. (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢). والتعميمات في معظمها يتم برهنتها أو استنتاجها واكتشافها، وبعضها الآخر عبارات مسلّم بصحتها، وبالتالي يمكن اعتبار كل ما جاء في محتوى مناهج الرياضيات المدرسية تحت عنوان قاعدة أو قانون أو نظرية أو خاصية أو حقيقة أو نتيجة أو مسلمة تعميماً رياضياً، ومن أمثلة التعميمات:

- مجموع قياسات زوايا المثلث 180 (لاحظ أن هذه العبارة عامة وتنطبق على جميع المثلثات، وتحتوي علاقة بين عدة مفاهيم هي: مفهوم الجمع، ومفهوم القياس، ومفهوم الزاوية، ومفهوم المثلث)
- نظرية فيثاغورس: "في المثلث القائم الزاوية يكون مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين".
- نظرية الزاوية المحيطية والمركزية: "يكون قياس الزاوية المركزية في الدائرة يساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس".
- نتيجة: كل مربع مستطيل.
- نتيجة: بعض المستطيلات هي مربعات.
- قانون مساحة المستطيل= الطول × العرض.

(١٠-٩) أهمية تدريس التعميمات الهندسية:

تتمثل أهمية تدريس التعميمات الهندسية فيما يأتي (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

- التعميمات الهندسية تعمل على اختصار عملية التعليم والتعلم وتوفر الجهد، تخيل لو أن طالبا كلما أراد أن يحل تمرينا هندسيا يثبت كل نظرية يستخدمها فإن ذلك يمثل عبئاً كبيراً وجهداً ضائعاً ووقتاً مستهلكاً.
- التعميمات الهندسية تعمل على ربط المفاهيم الهندسية بعضها، فالمربع هو مستطيل، والمربع هو معين، والمعين هو متوازي أضلاع، ومتوازي الأضلاع هو شبه منحرف، وشبه المنحرف هو شكل رباعي وبالتالي فإن التعميمات تعمل كجسر يربط بين المفاهيم الهندسية.
- التعميمات لا غنى عنها في البناء الرياضي، فحجم متوازي المستطيلات كناتج ضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه هو تعميم يضم عدة مفاهيم

كالمساحة والإرتفاع، ووظيفة هذا التعميم مهمة بقدر أهمية مفاهيم الحجم والمساحة بشكل عام.

- التعميمات تتضمن القواعد الهندسية (كما أسلفنا) ولما كانت حياتنا وتعاملاتنا اليومية وسلوكياتنا تحكمها قواعد فان ذلك يربط الرياضيات المدرسية بالحياة ويجعل تعلم القواعد الهندسية ينتقل أثره في الحياة اليومية.

(١٠-١٠) خطوات تدريس التعميمات:

يمكن تلخيص خطوات تدريس التعميمات على النحو الآتي (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

- التمهيد: وهي خطوة يقوم بها المعلم في بداية كل حصة، وتشمل أربعة أشياء خطوات فرعية يقوم بها المعلم وهي :

١-كتابة عنوان الدرس.

٢- كتابة أهداف الدرس على السبورة (أو ذكرها للطلبة)

٣- مراجعة المتطلبات السابقة الضرورية لفهم موضوع الدرس.

٤- إثارة دافعية الطلبة للدرس وتشويقهم لدراسته: إن إثارة دافعية الطلبة لموضوع الدرس يشكل عاملاً مهماً، وقد يحدد مدى فهمهم واستيعابهم للدرس، ولكنه يحتاج لتحضير جيد من المعلم، ولقدرة كبيرة من المعلم على ابتكار وإيجاد تطبيقات لموضوع الدرس بحيث تكون مثيرةً للانتباه وجذابة ومناسبة للطلبة، ويمكن للمعلم إثارة دافعية الطلبة بعدة طرق مثل:

أ) توضيح أهمية الموضوع الذي سيدرسه الطلبة في الحياة.

ب) طرح مشكلة يحتاج حلها لاستخدام موضوع الدرس.

ج) لفت انتباه الطلبة إلى أن ما سيتعلمونه مهم للامتحان، سيسألهم عنه في نهاية الحصة، وهذه الطريقة غير مفضلة.

- صياغة التعميم: وهنا يقدم المعلم نص التعميم.
- التفسير: حيث يقوم المعلم بتوضيح نص التعميم، عن طريق اتباع ما يأتي:

١) إعادة صياغة التعميم بطريقة أبسط.
٢) توضيح الكلمات أو الرموز الغامضة الواردة في نص التعميم.
٣) رسم توضيحي للتعميم إذا لزم.

- التبرير: يقوم المعلم بتقديم أدلة على صحة التعميم، ويجعلهم يقومون باستنتاج التعميم، ويمكن للمعلم القيام بذلك بإحدى الطرق الآتية:
١) تقديم برهان رياضي للتعميم.
٢) طرح أمثلة متعددة يكون فيها التعميم صحيحاً.
٣) استنتاج التعميم عن طريقة ورقة عمل استقصائية يقوم الطلبة بحلها (كما سيتم توضيحه لاحقاً في الأمثلة).
٤) يطلب المعلم من الطلبة أمثلة معاكسة للتعميم (تنفي التعميم)، وعدم قدرتهم على ذلك يعني أن التعميم صحيح.

- المثال (الانطباق): يوضح المعلم الحالات التي يمكن أن يستخدم فيها التعميم، والتي يكون فيها صحيحاً ومنطبقاً.
- اللا مثال (اللا انطباق): يوضح المعلم الحالات التي لا يمكن أن يستخدم فيها التعميم، والتي لا يكون فيها صحيحاً ومنطبقاً.
- التطبيق: يقدّم المعلم للطلبة أسئلة متنوعة حول التعميم، والتي تتطلب استخدام التعميم في مواقف متعددة.

(١٠-١١) أمثلة لتدريس بعض التعميمات الهندسية:

📖 مثال (١): نظرية: "مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية ١٨٠°":

١- التمهيد: ويشمل ما يأتي:
١) كتابة عنوان الدرس: قانون توزيع الضرب على الجمع.
٢) كتابة أهداف الدرس على السبورة (أو ذكرها للطلبة) وهي:
- أن يتعرف الطالب نظرية مجموع زوايا المثلث.

- أن يبرهن الطالب صحة النظرية.
- أن يحل الطالب مسائل متنوعة تشتمل النظرية.

٣) مراجعة المتطلبات السابقة الضرورية لفهم موضوع الدرس: قياس الزاوية، والمثلث.

٤) إثارة دافعية الطلبة للدرس وتشويقهم لدراسته: مثلاً بتوضيح أهمية النظرية في تطبيق حياتي.

٢- التبرير: يقوم المعلم بتقديم أدلة على صحة التعميم عن طريق تقديم البرهان الرياضي للنظرية، واستنتاج التعميم عن طريقة ورقة عمل استقصائية يقوم الطلبة بحلها، كالآتي:



استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: جد قياس الزاوية أ باستخدام المنقلة =.........

السؤال الثاني: جد قياس الزاوية ب باستخدام المنقلة = ...

السؤال الثالث: جد قياس الزاوية ج باستخدام المنقلة= ....

السؤال الرابع: جد ناتج أ + ب + ج = ...

السؤال الخامس: نستنتج أن مجموع زوايا المثلث يساوي......

١- صياغة التعميم: يقدم المعلم نص التعميم: "مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي ١٨٠°"

٢- التفسير: حيث يقوم المعلم بتوضيح نص التعميم، نلاحظ هنا يمكن إعادة صياغة التعميم بطريقة أبسط كالآتي "أ + ب + ج = ١٨٠ درجة"، ويمكن تقديم رسم توضيحي للنظرية كالآتي:

ويكون توضيح الرموز الغامضة الواردة في نص التعميم، كالآتي: "حيث أ، ب، ج هي قياسات زوايا المثلث".

٣- المثال (الانطباق): يوضح المعلم الحالات التي يمكن أن تستخدم فيها النظرية.

فمثلاً يقول المعلم : "هذه النظرية تنطبق على أي مثلث مهما كان نوعه"

٤- اللا مثال (اللا انطباق): يوضح المعلم الحالات التي لا يمكن أن يستخدم فيها النظرية.

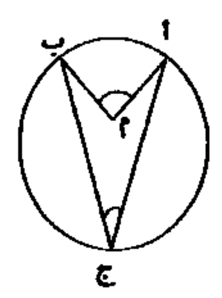
فمثلاً يقول المعلم: "هذه النظرية لا تكون صحيحة لأشكال هندسية أخرى"

٥- التطبيق: يقدّم المعلم للطلبة أسئلة متنوعة حول التعميم، والتي تتطلب استخدام التعميم في مواقف متعددة.

مثال (٢):

اكتب ورقة عمل استقصائية يستنتج الطلبة من خلالها القانون الآتي: قياس الزاوية المركزية في دائرة يساوي ضعف الزاوية المحيطة المشتركة لنفس القوس؟

استخدم الشكل المعطى للإجابة عن الأسئلة.



س١) باستخدام المنقلة جد قياس الزاوية أ م ب

س٢) باستخدام المنقلة جد قياس الزاوية أ ج ب

س٣) قارن بين إجابتك في ١، ٢؟

س٤) ماذا تستنتج؟

س٥) بشكل عام قياس الزاوية المحيطة:

(١٠-١٢) حل المسألة الهندسية

يعتبر حل المسالة الهندسية من أهم المواضيع قيد الدراسة في الرياضيات، ومع تقدم التقنية لم نعد نبذل الجهد في إكساب الطلبة مهارات السرعة والدقة فالآلة الحاسبة والحاسوب أصبحا يقومان بمعظم العمليات الحسابية بسرعة ودقة، وأصبح لدينا برامج متطورة للرسم وإيجاد كافة المقاييس الإحصائية، لكن لم تطالعنا بعد الصحف أو وسائل الإعلام أو الشبكة العنكبوتية ببرنامج يقوم بحل المسألة الهندسية.

يعد حل المسالة الهندسية عملية معقدة تقع في قمة الهرم المعرفي عند جانييه، وتحتاج من الطالب التحليل والتفكير. ونظرا لأهمية إكساب الطالب القدرة على حل المسألة الهندسية ليكون قادرا على حل مشكلاته الحياتية جاءت الحاجة الماسة لتنمية قدرة الطالب على حل المسألة الهندسية (أبو زينة، ٢٠٠٤).

تعريف المسألة الهندسية والتمرين

المسألة الهندسية موقف جديد يواجه المتعلم وليس لديه حل جاهز، فيحتاج أن يفكر فيه ويحلله ومن ثم يستخدم ما تعلمه سابقا ليتمكن من حله.

أما التمرين فهو موقف مألوف يتعرض له الطالب، تدرّب على مثله مسبقاً، ولديه القانون أو الطريقة اللازمة للحل.

وبالتالي فإن ما يمكن اعتباره مسألة لطالب قد يكون تمريناً لطالب آخر، فمثلاً إذا سألنا طالباً في الصف الأول ١٢ × ٣ كم يساوي فإن ذلك يعتبر مسألة بالنسبة له، بينما تكون نفس العبارة تمريناً لطالب في الصف الثالث الأساسي (بل،١٩٨٦).

(١٠-١٣) استراتيجية بوليا العامة لحل المسألة الهندسية:

تعد استراتيجية بوليا من الاستراتيجيات التي تساعد الطالب على تنظيم حل المسألة الهندسية التي تواجهه وتتم في أربع خطوات هي(بوليا، ١٩٦٨):

* فهم المسألة: ويتم بقراءة الطالب للمسألة، وإعادة صياغتها بلغته الخاصة،

وتحديد المعطيات والمطلوب، وعمل رسم توضيحي إذا لزم، وتوضيح الكلمات الغامضة الواردة في نص المسألة بلغة واضحة مفهومة.

* ابتكار خطة الحل: وتتم باختيار الطالب للاستراتيجية الخاصة المناسبة للحل. وقد يعرض المعلم في هذه الخطوة بعض الأسئلة التي توجه الطلبة نحو أفكار تسهم في حل المسألة كربط المسألة الحالية بمسألة سابقة ذات صلة.

* تنفيذ خطة الحل: وتتضمن تنفيذ الاستراتيجية أو مجموعة الاستراتيجيات التي اختارها الطالب وهي من أسهل خطوات حل المسألة خاصة إذا أدرك الطالب الخطة التي أعدها إدراكا واعيا وصحيحا واستمر في الحل دون يأس أو ملل وهنا يتوجب على المعلم تشجيعه وبث روح التحدي والمثابرة لديه.

* تقويم الحل (التأكد من صحة الحل): ويعني التحقق من معقولية الإجابة التي تم التوصل إليها.

ويتم التحقق من صحة الحل بعدة طرق منها التعويض أو اللجوء إلى طريقة حل أخرى أو من خلال السير بخطوات الحل بطريقة عكسية

(١٠-١٤) الاستراتيجيات الخاصة لحل المسألة الهندسية

(حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

أولاً: استراتيجية السير بخطوات الحل بشكل عكسي (Work Backward): وهي مفيدة عندما يتواجد مجموعة أو سلسلة من الأحداث ونعرف النتيجة، ولكننا بحاجة إلى تحديد ومعرفة شروط البداية فيبدأ الفرد من نهاية المسألة للوصول إلى بداية المسألة.

ثانياً: استراتيجية المحاولة والتعديل (Guess and Check): يستخدم في هذه الاستراتيجية الحزر والتخمين للوصول إلى الحل مرة تلو الأخرى، وحتى الوصول إلى اجابة معقولة للحل، وهذه الطريقة مفيدة خصوصاً إذا شعر الطالب بأن المحاولات ناجحة وتقربه إلى الجواب الصحيح في كل مرة.

ثالثاً: استراتيجية البحث عن قاعدة أو قانون لحل المسألة (Look for a formula or a principle or an Inequality) أحياناً تكون الأرقام في المسألة قابلة للكتابة بطريقة معادلة.

رابعاً: استراتيجية عمل نموذج أو شكل (Use Model or Draw a Diagram or A picture or chart): تساعد الصور أو الأشكال في تنظيم البيانات وتسهم في الوصول إلى الحل.

خامساً: استراتيجية حل مسألة أسهل (Solve a simpler problem) وذلك لتسهيل المواقف الصعبة أو المعقدة، أو تلك التي تحوي أرقاماً أو معادلات ذات صيغ صعبة، فنلجأ إلى تسهيل الحل باختيار أرقام أو معادلات أسهل تمهد لحل المسألة المعطاة.

سادساً: استراتيجية استخدام خصائص الأعداد(Use Numbers Properties) تعتمد هذه الاستراتيجية على فهم خصائص الأعداد مثل: مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي، ومجموع عددين فرديين هو عدد زوجي، وقواعد قابلية القسمة للأعداد.

سابعاً: إستراتيجية البحث عن نمط (Look for Pattern): من خلال دراسة عدد من الحالات نستطيع معرفة النمط الذي تسير عليه كافة الحالات، والرياضيات مليئة بالأنماط حتى أنها عرفت بأنها علم الأنماط.

ثامناً: استراتيجية عمل قائمة منظمة أو جدول (Make an Organized list or a Tabl) : وذلك عندما يتواجد سلسلة من الأرقام في مسألة، فيتم تنظيمها في قائمة أو جدول لسلامة استخدامها وحسن الاستفادة منها.

تاسعاً: استراتيجية التبرير المنطقي أو البرهان (Use logical Reasoning): نلجأ إلى نوع من المنطق للمساعدة في الوصول إلى الحل

عاشراً: استراتيجية تحديد أهداف فرعية (Minor Objectives) يتم حل المسألة باستخدام خطوات فرعية للوصول إلى المطلوب

(١٠-١٥) أهمية حل المسائل الهندسية

لحل المسائل الهندسية أهمية كبيرة في تعلم وتعليم الرياضيات وذلك لعدة أسباب منها

- حل المسائل الهندسية وسيلة مهمة للتدريب على المهارات الحسابية والجبرية والهندسية وإكسابها معنى.
- نتعلم عن طريقها كيف نستخدم المفاهيم والمهارات في مواقف جديدة.
- نكتشف من خلالها معارف جديدة.
- وسيلة لإثارة الفضول الفكري وحب الاستطلاع وتنمية الابداع والابتكار لدى الطلبة.

(١٠-١٦) الخوارزميات والمهارات الهندسية:

يمكن تعريف الخوارزمية (Algorithm) على أنها الخطوات الروتينية التي يتم اتباعها لأداء عمل ما، بحيث تكون هذه الخطوات مرتبة ومتسلسلة وواضحة، وتشكل الخوارزميات جزأ مهماً وكبيراً من الرياضيات.

أمثلة على الخوارزميات: خوارزمية رسم دائرة، رسم زاوية، رسم مستطيل، حل المعادلات والمتباينات، ترجمة المسالة اللفظية إلى صورة جبرية ...

أما المهارة الرياضية (Skill) فيقصد بها الكفاءة في أداء الخوارزمية بسرعة ودقة وإتقان على أن يرتبط الفهم بهذا الأداء، ويعني الفهم إدراك الموقف ككل ثم إدراك مدى العلاقة بين العناصر الداخلة فيه، واختيار العناصر المناسبة واستبعاد غيرها، مع القدرة على التعليل والتفسير للوصول إلى نتيجة ما. والفهم أهم ما تركز عليه الاتجاهات الحديثة في تدريس الرياضيات (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢).

(١٠-١٧) خطوات تدريس الخوارزمية الرياضية:

يمر تدريس الخوارزميات بالخطوات الآتية (حمزة والبلاونة، ٢٠١٢):

التمهيد: وهي خطوة عامة يقوم بها المعلم في بداية كل حصة، وتشتمل بشكل عام أربعة خطوات فرعية يقوم بها المعلم هي :

- كتابة عنوان الدرس
- كتابة أهداف الدرس على السبورة (أو ذكرها للطلبة)
- مراجعة المتطلبات السابقة الضرورية لفهم موضوع الدرس.
- إثارة دافعية الطلبة للدرس وتشويقهم لدراسته: بالطرق سابقة الذكر في المفاهيم أو التعميمات، وهي:

أ) توضيح أهمية الموضوع الذي سيدرسه الطلبة في الحياة

ب) طرح مشكلة يحتاج حلها لاستخدام موضوع الدرس

ج) لفت انتباه الطلبة بأن ما سيتعلمونه مهم للامتحان، سيسألهم في نهاية الحصة، وهذه الطريقة غير مفضلة.

١- عرض الخوارزمية: وهنا يقدم المعلم خطوات الخوارزمية، عن طريق تقديم سؤال وحله أمام الطلبة، ويجب أن يكون الحل مرتباً ومنظماً، وفق خطوات واضحة، ويفضل استخدام الوسائل التعليمية ما أمكن.

٢- التبرير: تقديم أدلة حول صحة خطوات الخوارزمية وصحة النتائج، بإحدى الخطوات الآتية:

١) إعادة الحل بطرق أخرى، وهذا يفيد في تقديم أدلة حول صحة الخوارزمية المستخدمة سابقاً، كما أنه يساعد في مراعاة الفروق الفردية بين الطلبة.

٢) التحقق من معقولية (منطقية) النتائج. فمثلاً إذا كان هناك شرط في السؤال أن يكون الناتج عدداً موجباً، فمن غير المنطقي أن يكون ناتج الحل سالباً.

٣) السير في خطوات الخوارزمية والتأكد من صحة كل خطوة.

٣- المثال (الإنطباق): يوضح المعلم الحالات التي يمكن أن يستخدم فيها الخطوات التي تم شرحها في تحرك عرض الخوارزمية، والتي يكون فيها السؤال المطروح صحيحاً ومنطبقاً.

٤- تحرك اللامثال (اللا انطباق): يوضح المعلم الحالات التي لا يمكن أن تستخدم فيها الخوارزمية، ويوضح الاخطاء الشائعة عند تنفيذ الخوارزمية.

٥- إن تعرف الأخطاء التي يرتكبها الطلبة في أدائهم للمهارة أمر ضروري ومهم قبل الطلب إليهم إجراء المزيد من التطبيقات لها، فالطالب الذي لا يعرف أن نظرية فيثاغورس تنطبق فقط على المثلث القائم الزاوية يخطئ في خوارزمية حل المثلث.

٦- التطبيق (التدريب): يقدّم المعلم للطلبة أسئلة متنوعة حول الخوارزمية، ويعمل على تهيئة الفرص لتطبيقاتها، والتطبيق يتراوح بين التطبيق المبسط للمهارة وبين تطبيقها في حل مسائل حقيقية.

حيث إن التدريب والممارسة عنصر أساسي ليتمكن الطلبة من الخوارزمية، ويحققوا المهارة في أدائها، على أن يتم تنويع هذه الممارسة وعدم التكرار بشكل ممل للطلبة.

أسئلة نهاية الوحدة العاشرة

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيح:

١) يمكن اعتبار مفهوم العدد الصحيح مثالاً على:

أ) مفهوم فصلي

ب) مفهوم غير معرّف

ج) مفهوم ربطي

د) مفهوم علاقي

٢) ما هو المقصود بالاستخدام الدلالي للمفهوم:

أ) تقديم تعريف المفهوم

ب) تقديم أمثلة منتمية للمفهوم

ج) تقديم أمثلة غير منتمية للمفهوم

د) تقديم أسئلة على المفهوم

٣) يمكن اعتبار مفهوم المستطيل مثالاً على:

أ) مفهوم فصلي

ب) مفهوم غير معرّف

ج) مفهوم ربطي

د) مفهوم علاقي

٤) ما هو المقصود بالاستخدام الاصطلاحي للمفهوم:

أ) تقديم تعريف المفهوم

ب) تقديم أمثلة منتمية للمفهوم

ج) تقديم أمثلة غير منتمية للمفهوم

د) تقديم أسئلة على المفهوم

٥) الصفات المشتركة بين مجموعة من الأشياء وتحدد الانتماء له، هذه العبارة هي تعريف:

أ)المفاهيم

ب)الخوارزميات

ج) المهارات

د) التعميمات

٦) العدد الأولي: هو العدد الصحيح الموجب الذي يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط، يمكن اعتبار هذه العبارة:

أ) مفهوم فصلي

ب) تعميم كلي

ج) مفهوم ربطي

د) تعميم جزئي

٧) يمكن اعتبار مفهوم عملية الجمع مثالاً على:

أ) مفهوم فصلي

ب) خوارزمية

ج) مفهوم ربطي

د) مفهوم علاقي

٨) عند تدريس التعميمات أحد الآتية لا يندرج ضمن التفسير:

أ) اعطاء أمثلة متعددة يكون التعميم فيها صحيحاً

ب) إعادة صياغة التعميم بلغة أبسط

ج) رسم شكل توضيحي للتعميم إذا لزم

د) توضيح الرموز والكلمات الغامضة التي يحتويها التعميم

٩) أحد الآتية لا يندرج ضمن تبرير التعميم

أ) تقديم برهان رياضي

ب) إعطاء أمثلة متعددة يكون فيها التعميم صحيحاً

ج) أن نطلب من الطلبة تقديم مثال معاكس فيعجزون وبالتالي يقتنعون بصحة التعميم

د) توضيح الحالات التي يكون فيها التعميم صحيحاً

١٠) "مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية ١٨٠°" يمكن اعتبار هذه العبارة:

أ) مفهوم غير معرّف

ب) مسلّمة

ج) مفهوم معرّف

د) تعميم

١١) "هي جملة رياضية تنطبق على مجموعة من الأشياء وتحدد العلاقة بين مفهومين أو أكثر" هذه العبارة تعريف:

أ)المفاهيم

ب)الخوارزميات

ج) المهارات

د) التعميمات

١٢) أحد الآتية لا يندرج ضمن تحرك فهم المسألة؟

أ) تحديد المعطيات والمطلوب

ب) رسم تقريبي للسؤال إذا لزم

ج) وضع فرضيات أو حلول مقترحة

د) إعادة صياغة المسألة بلغة الطالب الخاصة

١٣) أحد الآتي يندرج ضمن تحرك فهم المسألة

أ) إعادة صياغة المسألة بلغة الطالب الخاصة

ب) الوصول لفكرة الحل

ج) وضع فرضيات أو حلول مقترحة

د) تنفيذ الحل

السؤال الثاني:

اشرح كيف يمكن أن تدرّس مفهوم: "المربع" لطلبة الصف الأول الأساسي، مع ذكر الخطوات التي ستقوم بها .

السؤال الثالث:

اشرح كيف يمكن أن تدرّس مفهوم: "الزاوية" لطلبة الصف الأول الأساسي، مع ذكر الخطوات الإجرائية التي ستقوم بها .

السؤال الرابع:

اشرح كيف يمكن أن تدرّس مفهوم: "المثلث" لطلبة الصف الأول الأساسي، مع ذكر الخطوات الإجرائية التي ستقوم بها .

السؤال الخامس:

اشرح بالتفصيل كيف يمكن أن تدرس مساحة المستطيل.

السؤال السادس: عرّف المصطلحات الآتية:

١) التمارين الهندسية.

٢) المسائل الهندسية.

السؤال السابع:

ما هي خطوات حل المسألة الرياضية مع التوضيح؟

المراجع العربية

-أبو زينة، فريد (٢٠١٠)، تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتعليمها، دار وائل، عمان

-أبو زينة، فريد كامل.(٢٠٠٣).مناهج الرياضيات المدرسية وتدريسها .ط٢.عمان:مكتبة الفلاح.

- أبو لوم، خالد. (٢٠٠٧). الهندسة طرق واستراتيجيات تدريسها، دار المسيرة، عمان، الأردن.

-بوليا، جورج (١٩٦٨). البحث عن الحل، ترجمة أحمد سعيدان، دار مكتبة الحياة.

-بل، فردريك.(١٩٨٦). طرق تدريس الرياضيات، ترجمة محمد أمين المفتي وممدوح سليمان، الدار العربية للنشر، القاهرة.

-البلاونة،فهمي؛ وأبو موسى،مفيد.(٢٠١٠).مفاهيم أساسية في الرياضيات،عمان:دار جليس الزمان للنشر والتوزيع.

-بدوي، رمضان (٢٠٠٩)، استراتيجيات في تعليم وتقويم الرياضيات، دار الفكر، عمان.

-حمدان، فتحي (٢٠٠٧). مفاهيم أساسية في العلوم والرياضيات، دار المناهج، عمان.

- الحربي، طلال سعد. (٢٠٠٣). منهج الهندسة في رياضيات المرحلة المتوسطة في المملكة العربية السعودية بين مراحل بياجيه ومستويات فان هيل. المجلة التربوية، ١٨(٦٩): ٨١-١١٢.

- حمزة، محمد؛ البلاونة، فهمي. (٢٠١٢). مناهج الرياضيات واستراتيجيات تدريسها، دار جليس الزمان، عمان.

-حمزة، محمد (٢٠١٠). مفاهيم أساسية في الرياضيات وأساليب تدريسها، دار الفكر، عمان.

- خطايبة،عبدالله.(٢٠٠٥).تعليم العلوم للجميع(ط١).دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان.

- جابر،جابر.(٢٠٠٢).اتجاهات وتجارب معاصرة في تقويم أداء التلميذ والمدرس(ط١).القاهرة:دار الفكر العربي.

-سعد الله، أبو بكر خالد(٢٠٠١). في الإنشاء الهندسي وأشياء أخرى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

- جبر، معين؛ فوارعة، عادل. (٢٠١١). مدى توافق محتوى الهندسة في كتب الرياضيات للمرحلة الأساسية الدنيا في فلسطين مع معايير الرياضيات العالمية(NCTM,٢٠٠٠)، دراسة مقدمة للمؤتمر التربوي الثاني لمديرية التربية والتعليم، الخليل.
- عباس، محمد؛ العبسي، محمد. (٢٠٠٩). مناهج وأساليب تدريس الرياضيات، دار المسيرة، عمان.
- النعواشي، قاسم(٢٠٠٧)، الرياضيات لجميع الأطفال، دار الفكر، عمان.
- اليونس، يونس؛ أبو لوم، خالد؛ المقدادي، أحمد. (٢٠٠٨). بنية الاعداد لمعلمي المرحلة الابتدائية، دار المسيرة، عمان.
- وزارة التربية والتعليم (٢٠١٣)، مناهج الرياضيات المدرسية لصفوف المرحلة الأساسية والثانوية، عمان- الأردن.

المراجع الأجنبية

- Aledo, J. A.; Cortés, J. C.; and Pelayo, F. L. "A Study of Two Classic Methods of Approximate Construction of Regular Polygons by Using Mathematica". Mathematica in Educ. Res. 9, 12-19, 2000.
- Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover, pp. 96-97, 1987.
- Bold, B. "Achievement of the Ancient Greeks" and "An Analytic Criterion for Constructibility." Chs. 1-2 in Famous Problems of Geometry and How to Solve Them. New York: Dover, pp. 1-17, 1982.
- Conway, J. H. and Guy, R. K. The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag, pp. 191-202, 1996.
- Coolidge, J. L. "Famous Problems in Construction." Ch. 3 in A Treatise on the Geometry of the Circle and Sphere. New York: Chelsea, pp. 166-188, 1971.
- Courant, R. and Robbins, H. "Geometric Constructions. The Algebra of Number Fields." Ch. 3 in What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd ed. Oxford, England: Oxford University Press, pp. 117-164, 1996.

- Dickson, L. E. "Constructions with Ruler and Compasses; Regular Polygons." Ch. 8 in Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field (Ed. J. W. A. Young). New York: Dover, pp. 352-386, 1955.

- Dummit, D. S. and Foote, R. M. "Classical Straightedge and Compass Constructions." §13.3 in Abstract Algebra, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, pp. 443-448, 1998.

- Eppstein, D. "Geometric models. " http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/model.html.

- Gardner, M. "The Transcendental Number Pi." Ch. 8 in Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American. New York: Simon and Schuster, pp. 91-102, 1966.

- Gardner, M. "Mascheroni Constructions." Ch. 17 inMathematical Circus: More Puzzles, Games, Paradoxes and Other Mathematical Entertainments from Scientific American. New York: Knopf, pp. 216-231, 1979.

- Harris, J. W. and Stocker, H. "Basic Constructions." §3.2 in Handbook of Mathematics and Computational Science. New York: Springer-Verlag, pp. 60-62, 1998.

- Kostovskii, A. "Geometrical Constructions with compasses only, Mir, Moscow, 1986.

- Martin, G. E. Geometric Constructions. New York: Springer-Verlag, 1998.

- Meyers, L. F. "Update on William Wernick's Triangle Constructions with Three Located Points". ' Math. Mag. 69, 46-49, 1996.

- National Council Of Teachers Of Mathematics(NCTM).(2000). Principles and evaluation standard for school mathematics, Riston,:http:/www.nctm.org

- Olds, C. D. Continued Fractions. New York: Random House, pp. 59-60, 1963.

- Petersen, J. Methods and Theories for the Solution of Problems of Geometrical Constructions Applied to 410 Problems. New York: Stechert, 1923. Reprinted in String Figures and Other Monographs. New York: Chelsea, 1960.

• Plouffe, S. "The Computation of Certain Numbers Using a Ruler and Compass." J. Integer Sequences 1, No. 98.1.3, 1998.http://www.math.uwaterloo.ca/JIS/VOL1/compass.

• Posamentier, A. S. and Wernick, W. Advanced Geometric Constructions. Palo Alto, CA: Dale Seymour, 1988.

• Ramanujan, S. "Modular Equations and Approximations to π." Quart. J. Pure. Appl. Math. 45, 350-372, 1913-1914.

• Smogorzhevskii, A. S. The Ruler in Geometrical Constructions. New York: Blaisdell, 1961.

• Steinhaus, H. Mathematical Snapshots, 3rd ed. New York: Dover, 1999.

• Sykes, M. Source Book of Problems for Geometry. Palo Alto, CA: Dale Seymour, 1997.

• Weisstein, E. W. "Books about Geometric Construction." http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/GeometricConstruction.html.

• Wernick, W. "Triangle Constructions with Three Located Points." Math. Mag. 55, 227-230, 1982.

مواقع الانترنت:

- http://www.mathdaily.com/lessons/Mathematics
- www.schoolarabia.net
- www.afaqmath.com
- www.makkaheshraf.gov.sa
- www.tripod.lycos.com
- www.alragam.com
- www.elearning.jo

طباعة وتنسيق: صفاء نمر البصار (أم أصيل)
962785288504 SAFANIMER@YAHOO.COM


محمد خطاب